КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра теории относительности и гравитации

Р.А. ДАИШЕВ   А.Ю.КУЗНЕЦОВА

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Сборник задач

Казань – 2015

УДК 517.5

Принято на заседании кафедры теории относительности и гравитации
Протокол № 4 от 13 мая 2015 года

Рецензент:
Доктор физико-математических наук,
Профессор, заведующий кафедрой высшей математики КГЭУ **С.А. Григорян**

Даишев Р.А., Кузнецова А.Ю.
Теория Функций комплексного переменного. Сборник задач / Р.А. Даишев, А.Ю. Кузнецова – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 139 с.

Данное пособие предназначено для студентов института физики и составлено с учетом специфики преподавания математики для студентов физических и инженерно-физических специальностей. Это второе издание, существенно дополненное и переработанное. В нем изложены основы курса теории функций комплексного переменного. Каждый параграф пособия снабжен подбором соответствующих задач различной сложности. Часть задач носит теоретический характер и направлена на развитие у студентов навыков работы с математическими доказательствами. Все задачи снабжены ответами, некоторые – указаниями к решению или решениями.

Авторы выражают глубокую благодарность Л.А. Аксентьеву, чей «Сборник задач по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению» был положен в основу данного пособия.

Содержание

1 Комплексная плоскость **6**

1.1 Комплексные числа 6

1.2 Линии и области на комплексной плоскости . . . 10

Задачи 14

Ответы 18

2 Непрерывные функции **20**

2.1 Понятие функции комплексного переменного . . 20

2.2 Элементарные функции 22

Задачи 26

Ответы 29

3 Аналитические функции **32**

3.1 Дифференцируемые функции 32

3.2 Условия Коши-Римана 34

Задачи 37

Ответы 40

4 Многозначные функции **42**

4.1 Регулярные ветви многозначных функций 42

4.2 Многозначная функция Arg$z$ 44

Задачи 50

Ответы 52

5 Конформные отображения 54

5.1 Геометрический смысл производной 54

5.2 Конформное отображение и его свойства 56

5.3 Примеры конформных отображений 58

Задачи 66

Ответы 71

6 Интеграл от функции комплексного переменного 73

6.1 Понятие интеграла и первообразной 73

6.2 Теория Коши 78

Задачи 82

Ответы 86

7 Ряды Тейлора и Лорана 89

7.1 Аналитические функции и степенные ряды . . . 89

7.2 Приемы разложения в степенной ряд 95

7.3 Ряды Лорана 98

Задачи 101

Ответы 104

8 Особые точки. Вычеты 106

8.1 Изолированные особые точки 106

8.2 Понятие вычета 111

Задачи 116

Ответы 120

9 Применение теории вычетов 123

9.1 Вычисление интегралов по замкнутому контуру . 123

9.2 Вычисление определенных интегралов 125

Задачи 132

Ответы 136

1 Комплексная плоскость

1.1 Комплексные числа

Комплексными числами называются пары (x, y) действительных чисел x и y, если для них определены понятия равенства и операции сложения и умножения следующим образом:

1. Два комплексных числа (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

2. Суммой двух комплексных чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) называется комплексное число $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$.

3. Произведением двух комплексных чисел называется комплексное число $(x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$.

Для обозначения равенства, суммы, произведения и других операций над комплексными числами применяются те же знаки, что и для действительных чисел. Комплексные числа вида $(x, 0)$ отождествляются с действительными числами, $(x, 0) = x$, поскольку

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \quad \text{и} \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

Комплексное число $(0, 1)$ называется мнимой единицей и обозначается i, т. е. $i = (0, 1)$. Имеем $i \cdot i = (0, 1)\ (0, 1) = -1$.

Легко видеть, что любое комплексное число (x, y) можно представить в виде

$$(x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy. \qquad (1.1)$$

Этот вид называется *алгебраической формой* комплексного числа. Комплексные числа вида iy называются чисто мнимыми. Число 0, т. е. комплексное число $(0, 0)$, является единственным числом, которое одновременно и действительное, и чисто мнимое.

Комплексное число $x + iy$ принято обозначать одной буквой z, т. е. $z = x + iy$. Число x называют действительной частью, а число y — мнимой частью комплексного числа $z = x + iy$. Для них приняты следующие обозначения:

$$x = \mathrm{Re}(x + iy) = \mathrm{Re} z, \quad y = \mathrm{Im}(x + iy) = \mathrm{Im} z.$$

Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда по отдельности равны их действительные и мнимые части: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \; y_1 = y_2$.
Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* с комплексным числом $z = x + iy$ и обозначается через $\overline{z}$.

Рассмотрим операцию деления комплексных чисел. Частным двух чисел z_1 и z_2 называется такое число z, которое удовлетворяет уравнению $zz_2 = z_1$, и обозначается $z = \dfrac{z_1}{z_2}$. Это уравнение имеет единственное решение для любых двух комплексных чисел ($z_2 \neq 0$) и имеет вид

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}}.$$

В алгебраической записи имеем

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой плоскости с координатами (x, y). Такое соответствие между точками плоскости и комплексными числами является взаимно однозначным. Ось абсцисс называют действительной осью, а ось ординат — мнимой осью. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. При переходе к полярным координатам получается *полярная*, или *тригонометрическая* запись комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1.2}$$

при этом $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$.

Полярные координаты числа $z = x + iy$ — полярный радиус $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и полярный угол φ, соответственно называются его *модулем* и *аргументом* и обозначаются символами

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z;$$

модуль определяется однозначно, а аргумент — с точностью до слагаемого, представляющего собой целое кратное 2π. Главное значение аргумента — $\arg z \in (-\pi, \pi]$, т. е. $-\pi < \arg z \leq \pi$,

$$\mathrm{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.3}$$

Точка $z = 0$ является единственной точкой комплексной плоскости, для которой аргумент не определен.

Если $z_1 = z_2$, то $|z_1| = |z_2|$, $\arg z_1 = \arg z_2$, $\mathrm{Arg} z_2 = \mathrm{Arg} z_1 + 2\pi k$.

Для комплексных чисел в тригонометрической форме имеем:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \, [\, \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \, \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \,]$;

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \, [\, \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \, \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \,]$;

$z^n = r^n \, (\, \cos n\varphi + i \sin n\varphi \,)$.

Корень натуральной степени n из z определяется как такое комплексное число $w = \sqrt[n]{z}$, что $w^n = z$,

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right], \quad k = 0, \pm 1, \ldots \tag{1.4}$$

Очевидно, что среди значений различными являются только n, при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Для простоты записи вводится сокращенное обозначение (поскольку возведение числа в мнимую степень не определено), так называемая *формула Эйлера*,

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \tag{1.5}$$

и тригонометрическая форма записи комплексного числа (1.2) принимает компактный вид:

$$z = r\, e^{i\varphi}. \tag{1.6}$$

Действие возведения в степень будет введено позже, и будет видно, что правую часть формулы Эйлера действительно можно понимать как мнимую степень числа e.

1.2 Линии и области на комплексной плоскости

Окрестностью $C(\delta, z_0)$ точки z_0 комплексной плоскости называется множество точек z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, где δ — заданное положительное число. Это множество представляет собой круг радиусом δ с центром в точке z_0. Точка z_0 называется *изолированной точкой* множества E, если существует такое $\delta > 0$, что пересечение $E \cap C(\delta, z_0)$ состоит из единственной точки z_0.

Точка z_0 называется предельной точкой множества E, если для любого $\delta > 0$ в пересечении $E \cap C(\delta, z_0)$ имеется бесконечное множество точек E.

Комплексная плоскость, к которой мысленно присоединяется единственная бесконечно удаленная точка, называется *полной* или *расширенной* комплексной плоскостью.

Понятие бесконечности вводится с помощью следующего определения. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется сходящейся к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \quad \text{если} \quad \lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty.$$

Последнее означает, что для любого $R > 0$ существует такой номер N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|z_n| > R$, т. е. точка z_n лежит вне круга радиуса R с центром в точке 0 и принадлежит множеству точек z, удовлетворяющих неравенству $|z| > R$. Это множество называется *окрестностью бесконечности*. Точка $z = \infty$ является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности точки $z = \infty$ содержатся все члены этой последовательности, за исключением их конечного числа.

Дополнение множества E до расширенной комплексной плоскости обозначим через CE. Множество всех предельных точек обозначим через E'. Множество E называется *замкнутым*, если $E' \subseteq E$. Объединение $E \cup E' = \overline{E}$ называется *замыканием* множества E.

Пересечение $\overline{E} \cap \overline{CE} = \Gamma$ называется границей множества E.

Каждая точка $z_0 \in \Gamma$ называется граничной точкой множества E и обладает тем свойством, что для любого $\delta > 0$ ни одно из множеств $E \cap C(\delta, z_0)$, $CE \cap C(\delta, z_0)$ не совпадает с пустым множеством $\emptyset$.

Точка z_0 называется *внутренней точкой* множества E, если существует $\delta > 0$ такое, что $C(\delta, z_0) \subset E$. Множество E называется *открытым*, если каждая точка этого множества является внутренней.

Пустое множество и множество всех точек расширенной комплексной плоскости являются и открытыми, и замкнутыми.

Множество точек расширенной комплексной плоскости называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат данному множеству.

Связное открытое множество точек комплексной плоскости называется *областью* и обозначается через G, D и т.п.

Область называется *односвязной*, если ее граница является связным множеством; в противном случае область называется *многосвязной*. Число связных компонент границы области называется *порядком связности* области. Например, круг $|z - z_0| < R$ является односвязной областью, а кольцо

$0 \leq r < |z - z_0| < R$ — двусвязной. Множество E, состоящее из двух кругов $|z+1| < 1$ и $|z-1| < 1$, является открытым, но не связным, так как, например, ценры этих кругов нельзя соединить кривой, все точки которой принадлежат E.

Задачи

1.1. Найти значения:

1) $\dfrac{1-i}{1+i}$; 2) $\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{1+i}{1-i}$; 3) $\dfrac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}$; 4) $\dfrac{2+3i}{(1+i)^2}$.

1.2. Найти действительную и мнимую части следующих комплексных чисел:

1) $\dfrac{1}{1-i}$; 2) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$; 3) $\left(\dfrac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$;

4) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$; 5) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

1.3. Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:

1) i; 2) -3; 3) $1+i^{123}$;

4) $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\dfrac{1-i}{1+i}$;

6) $-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$; 7) $(-4+3i)^3$;

8) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$; 9) $1+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

1.4. Доказать равенства:

1) $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}\,z$; 2) $z-\overline{z}=2\,i\,\mathrm{Im}\,z$; 3) $\overline{(\overline{z})}=z$;

4) $\overline{(z_1+z_2)}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; 5) $\overline{(z_1-z_2)}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$;

6) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; 7) $\overline{(z_1z_2)}=\overline{z_1\cdot z_2}$; 8) $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$.

1.5. Найти все решения следующих систем уравнений:

$$1)\ \begin{cases} \left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3}, \\ \left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \left|z^2-2i\right| = 4, \\ \left|\dfrac{z+1+i}{z-1-i}\right| = 1. \end{cases}$$

1.6. Найти все решения следующих уравнений:

1) $z^2 = i$;	2) $z^2 = 3-4i$;	3) $z^3 = -1$
4) $z^6 = 64$;	5) $z^7+1=0$	6) $z^8 = 1+i$;
7) $\overline{z} = z^3$;	8) $\lvert z\rvert - z = 1+2i$	

1.7. Доказать, что если $w = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, то имеет место равенство

$$1 + w^k + w^{2k} + \cdots + w^{(n-1)k} = 0$$

для любого натурального k, не являющегося кратным n.

Описать области, заданные следующими соотношениями, и установить, являются ли они односвязными:

1.8. $|z-z_0| < R$;

1.9. $1 < |z-i| < 2$;

1.10. $2 < |z-i| < \infty$;

1.11. $0 < \mathrm{Re}(2iz) < 1$;

1.12. $|z-z_0| > R$;

1.13. $0 < |z+i| < 2$;

1.14. $\mathrm{Im}(iz) < 1$;

1.15. $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z} > \dfrac{1}{4}$.

Указать на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих указанным ниже соотношениям:

1.16. $\mathrm{Im}\,\dfrac{z+1}{z-i} = 0$;

1.17. $|z-i| + |z+i| < 4$;

1.18. $\mathrm{Re}\,\dfrac{z-2i}{z+2i} = 0$;

1.19. $|z-5| - |z+5| < 6$;

1.20. $\mathrm{Arg}\,\dfrac{z-z_1}{z-z_2} = 0$;

1.21. $\mathrm{Arg}\,\dfrac{i-z}{z+i} = 0$.

Записать с помощью неравенств следующие открытые множества точек комплексной плоскости:

1.22. Первый квадрант.

1.23. Левая полуплоскость.

1.24. Полоса, состоящая из точек, отстоящих от мнимой оси на расстояние, меньшее трех.

1.25. Внутренность эллипса с фокусами в точках $1+i$, $3+i$ и большой полуосью, равной 3.

1.26. Внутренность угла с вершиной в точке z_0 раствора $\pi/4$, симметричного относительно луча, параллельного положительной мнимой полуоси.

1.27. Пусть $A > 0$ и C действительные, а B – комплексная постоянные и пусть $AC < |B|^2$. Доказать, что уравнение

$$A\,|z|^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0$$

является уравнением окружности, а также найти центр этой окружности и ее радиус.

Ответы

1.1 1) $-i$ 2) 1 3) $\dfrac{1-r^2+i2r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}$ 4) $\dfrac{3-2i}{2}$

1.2 1) $\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2},\ \mathrm{Im}z=\dfrac{1}{2}$ 2) $\mathrm{Re}z=0,\ \mathrm{Im}z=1$ 3) $\mathrm{Re}z=-1,\ \mathrm{Im}z=0$

4) $\mathrm{Re}z=-2,\ \mathrm{Im}z=\dfrac{3}{2}$ 5) $\mathrm{Re}z=2,\ \mathrm{Im}z=0$

1.3 1) $|z|=1,\quad \mathrm{Arg}z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

2) $|z|=3,\quad \mathrm{Arg}z=(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

3) $|z|=\sqrt{2},\quad \mathrm{Arg}z=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

4) $|z|=1,\quad \mathrm{Arg}z=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

5) $|z|=1,\quad \mathrm{Arg}z=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

6) $|z|=1,\quad \mathrm{Arg}z=\dfrac{6\pi}{7}+2\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

7) $|z|=125,\quad \mathrm{Arg}z=-\dfrac{\pi}{2}+3\,\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}+2\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

8) $|z|=\dfrac{1}{4},\quad \mathrm{Arg}z=2\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

9) $|z|=\sqrt{2}\,\cos\dfrac{\pi}{14},\quad \mathrm{Arg}z=\dfrac{\pi}{14}+2\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

1.5 1) $z_1=6+17\,i,\quad z_2=6+8\,i$ 2) $z_1=1-i,\quad z_2=-1+i.$

1.6 1) $z_1=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\quad z_2=-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}};$ 2) $z_1=2-i,\quad z_2=-2+i;$

3) $z_1=1,\quad z_2=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad z_3=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

4) $z_k=2\Big(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\Big)^k,\quad k=0,1,2,3,4,5;$

5) $z_k=\exp\dfrac{2k+1}{7}\pi i,\quad k=0,1,2,3,4,5,6;$

6) $z_k=\sqrt[16]{2}\,\exp\,[\dfrac{\pi}{4}\,i\,(k+\dfrac{1}{8})],\quad k=0,1,2,3,4,5,6,7;$

7) $z_1=0,\ \ z_2=1,\ \ z_3=-1,\ \ z_4=i,\ \ z_5=-i;$ 8) $z=\dfrac{3}{2}-2i.$

1.8 Внутренность круга с центром в точке z_0 радиуса R; односвязна.

1.9 Внутренность кольца между окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $z_0=i$; двусвязна.

1.10 Внешность круга радиуса 2 с центром в точке $z_0 = i$ с выколотой бесконечно удаленной точкой; двусвязна.

1.11 Внутренность горизонтальной полосы, заключенной между прямыми $y = -\dfrac{1}{2}$ и $y = 0$; односвязна.

1.12 Внешность круга радиуса R с центром в точке z_0; односвязна. Бесконечно удаленная точка $z = \infty$ является внутренней точкой этой области.

1.13 Внутренность круга радиуса 2 с выколотым центром $z_0 = -i$; двусвязна.

1.14 Открытая полуплоскость, лежащая левее прямой $x = 1$.

1.15 Внутренность круга радиуса 2 с центром в точке $(2, 0)$; односвязна.

1.16 Прямая $x - y + 1 = 0$.

1.17 Внутренность эллипса $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

1.18 Окружность $|z| = 2$.

1.19 Часть плоскости, лежащая справа от левой ветви гиперболы
$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

1.20 Прямая, проходящая через точки z_1 и z_2, с вырезанным отрезком, соединяющим эти точки.

1.21 Внутренность отрезка, соединяющего точки $-i$ и i.

Указание. Воспользоваться равенством $\arg(-z) = \pi + \arg z$.

1.22 $\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0$. **1.23** $\operatorname{Re} z < 0$. **1.24** $|\operatorname{Re} z| < 3$.

1.25 $|z - (1 + i)| + |z - (3 + i)| < 6$.

1.26 $\dfrac{3\pi}{8} < \arg(z - z_0) < \dfrac{5\pi}{8}$.

1.27 Центр окружности в точке $-\dfrac{B}{A}$, а ее радиус равен $\sqrt{\dfrac{|B|^2 - AC}{A^2}}$.

2 Непрерывные функции

2.1 Понятие функции комплексного переменного

Символ, принимающий определенные комплексные значения (или пробегающий определенное множество точек комплексной плоскости), называется *комплексным переменным*. На расширенных комплексных плоскостях z и w рассмотрим соответственно множества E и E_1.

Говорят, что на множестве E расширенной комплексной плоскости z задана функция f, если каждой точке $z = x+iy \in E$ ставится в соответствие число $w = u + iv \in E_1$ (конечное или бесконечное), пишется $w = f(z)$. Согласно этому определению функция $w = f(z)$ является однозначной (вообще говоря, понятие многозначной функции существует, но в данном пособии мы не будем подробно касаться этого вопроса). Когда задана функция $w = f(z)$, говорят, что задано *отображение* множества E в множество E_1. Точка $w \in E_1$ называется *образом* точки $z \in E$, а точка z — *прообразом* точки w. Эту функцию можно представить в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$. Таким образом, комплекснозначную функцию комплексного переменного можно рассматривать как пару действительных функций двух действительных переменных.

Функция $w = f(z)$ называется *однолистной* в области D, если двум различным значениям $z_1 \neq z_2$, взятым из области D, соответствуют различные значения функции $f(z_1) \neq f(z_2)$. При однолистном отображении $w = f(z)$ прообраз $z = f^{-1}(w)$ можно рассматривать как однозначную функцию переменного w. При рассмотрении однозначного, но не однолистного отображения можно говорить об обратной функции $z = f^{-1}(w)$, но она не будет однозначной.

Пусть точка a является предельной точкой множества E. Говорят, что z стремится к a, $z \to a$, если, каково бы ни было $\delta > 0$, в процессе изменения z, начиная с определенного его значения, $z \in E \cap C(\delta, a)$. Предположим, что функция $w = f(z)$ задана на множестве E. Говорят, что число A является ее *пределом* при z, стремящимся к a,

$$\lim_{z \to a} f(z) = A,$$

если для любой окрестности $C(\varepsilon, A)$ найдется такая окрестность $C(\delta, a)$, что для всех $z \in C(\delta, a)$ значения $f(z)$ принадлежат $C(\varepsilon, A)$. Если $a, A \neq \infty$, то можно сказать, что число A называется пределом функции $f(z)$ при $z \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что всех $z \in E$, удовлетворяющих неравенству $|z - a| < \delta$, выполняется неравенство

$|f(z) - A| < \varepsilon$.

Данное определение предела функции эквивалентно следующему: $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A$, если для любой последовательности $\{z_n\}$, $z_n \neq a$, сходящейся к a, последовательность $\{f(z_n)\}$ сходится к A, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Следует иметь в виду, что для данной функции $f(z)$ *существование предела по любому фиксированному пути* $(z \to z_0)$ *не гарантирует существование предела при* $z \to z_0$.

Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* a если она определена в окрестности этой точки и $\lim\limits_{z\to a} f(z) = f(a)$.

2.2 Элементарные функции

Функцию e^z естественно определить тем же предельным соотношением, которым она определяется в действительном анализе:

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \tag{2.1}$$

Полагая $z = x + iy$, можно убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = e^x, \quad \lim_{n\to\infty} \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = y.$$

Значит, существует и предел (2.1), который в полярной форме записывается так:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y), \tag{2.2}$$

$$\mathrm{Re} z = e^x \cos y, \quad \mathrm{Im} z = e^x \sin y.$$

При $y = 0$ эта функция совпадает с действительной функцией e^x, а при $x = 0$ мы получаем формулу Эйлера (1.5) Из этого определения вытекают следующие свойства e^z:

1. Для любых комплексных z_1 и z_2 выполняется равенство

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

2. Функция e^z является периодической с периодом $2\pi i$,

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

3. Функция e^z непрерывна на всей комплексной плоскости.

4. Для любого комплексного $z = x + iy$ имеют место равенства

$$|e^z| = e^x, \quad \mathrm{Arg}\, e^z = y.$$

5. Функция e^z принимает все значения, кроме нуля, т. е. уравнение $e^z = A$ разрешимо для любого комплексного числа $A \neq 0$. Если $\alpha = \mathrm{Arg} A$, то все решения этого уравнения выражаются формулой

$$z = \ln |A| + i(\alpha + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Если $e^z = A$, то комплексное число z называется *логарифмом* комплексного числа $A \neq 0$ и обозначается через $\mathrm{Ln}A$,

$$\mathrm{Ln}A = \ln|A| + i\mathrm{Arg}A.$$

В частности, $\mathrm{Ln}1 = 2k\pi i$, $\mathrm{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i$, $\mathrm{Ln}i = (2k+\frac{1}{2})\pi i$.

Функции $\sin z$ и $\cos z$ естественно определить так, чтобы при действительных z $(z = x)$ они совпадали с $\sin x$ и $\cos x$. Учитывая, что для любого действительного x имеют место равенства

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad (2.3)$$

функции $\sin z$ и $\cos z$ определяются формулами

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}). \qquad (2.4)$$

Из этого определения вытекают следующие свойства функций $\sin z$ и $\cos z$:

1. Функции $\sin z$ и $\cos z$ непрерывны на всей комплексной плоскости.

2. Функции $\sin z$ и $\cos z$ принимают все значения, т. е. уравнения $\sin z = A$ и $\cos z = A$ имеют решение для любого комплексного числа A.

3. Все формулы элементарной тригонометрии, справедливые при всех действительных значениях x, остаются справедливыми и при всех комплексных значениях z.

4. Имеют место формулы

$$\operatorname{Re}\sin(x+iy) = \sin x\,\mathrm{ch}y, \quad \operatorname{Im}\sin(x+iy) = \cos x\,\mathrm{sh}y, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{Re}\cos(x+iy) = \cos x\,\mathrm{ch}y, \quad \operatorname{Im}\cos(x+iy) = -\sin x\,\mathrm{sh}y. \tag{2.6}$$

Уравнения $\sin z = 0$ и $\cos z = 0$ имеют решения только на действительной оси.

Функции $\mathrm{tg}z$ и $\mathrm{ctg}z$ определяются формулами

$$\mathrm{tg}z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg}z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Функция $\mathrm{tg}z$ непрерывна при $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, а функция $\mathrm{ctg}z$ непрерывна при $z \neq k\pi, \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Функции $\mathrm{sh}z$ и $\mathrm{ch}z$ определяются формулами

$$\mathrm{sh}z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \mathrm{ch}z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}). \tag{2.7}$$

Функции $\mathrm{sh}z$ и $\mathrm{ch}z$ непрерывны во всей комплексной плоскости.

Задачи

2.1. Найти Arg $f(z)$, если $z = r\, e^{i\varphi}$:

1) $f(z) = z^2$;   2) $f(z) = z^3$;

3) $f(z) = \sqrt[3]{z+1}$;   4) $f(z) = \sqrt{z-8}$;

5) $f(z) = \sqrt{z^2-4}$;   6) $f(z) = \sqrt{\dfrac{z-2}{z+1}}$.

2.2. Найти область однолистности следующих функций:

1) $f(z) = z^n,\ \ n \in \mathbb{N}$;   2) $f(z) = e^z$;

3) $f(z) = e^{3iz}$;   4) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

2.3. Для отображений, задаваемых функциями
1) $w = z^2$ и 2) $w = \dfrac{1}{z}$
найти образы линий $x = C$, $|z| = R$, $\mathrm{Arg} z = \alpha$ и образ области $|z| < r,\ \ \mathrm{Im} z > 0$.

2.4. Используя логическую символику, записать определение непрерывности функции комплексного переменного в области.

2.5. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^2 - 4iz - 3}{z - i}$;   2) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\cos z}{\operatorname{ch} iz}$;

3) $\lim\limits_{z \to i\pi/4} \dfrac{\sin iz}{\operatorname{ch} z + i \operatorname{sh} z}$;   4) $\lim\limits_{z \to \pi/2} \dfrac{e^{2iz} + 1}{e^{iz} + i}$.

2.6. Доказать, что $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{2i} \left(\dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z} \right)$ не существует.

2.7. Доказать, что $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{|z|}$ не существует.

2.8. Как доопределить данные функции в точке $z = 0$, чтобы они стали непрерывными в этой точке:

1) $f(z) = \dfrac{z\,\mathrm{Re}\,z}{|z|}$; 2) $f(z) = \dfrac{z\,\mathrm{Im}(z^2)}{|z|^2}$; 3) $f(z) = e^{-1/|z|}$.

2.9. Доказать, что функция e^z имеет чисто мнимый период $2\pi i$, т. е. $e^{z+2\pi i} = e^z$.

2.10. Доказать тождества:

1) $\sin iz = i\,\mathrm{sh}\,z$; 2) $\cos iz = \mathrm{ch}\,z$; 3) $\mathrm{tg}\,iz = i\,\mathrm{th}\,z$.

2.11. Вычислить значения функций в указанных точках:

1) $\cos(1+i)$; 2) $\mathrm{ch}\,i$; 3) $\mathrm{sh}(-2+i)$;

4) $\mathrm{Ln}(-1)$; 5) $\mathrm{Ln}i$; 6) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2.12. Получить аналитические выражения для указанных ниже функций и для каждой из них найти значение в соответствующей точке z_0:

1) $w = \mathrm{Arcsin}\,z,\ z_0 = i$; 2) $w = \mathrm{Arctg}\,z,\ z_0 = i/3$;

3) $w = \mathrm{Arsh}\,z,\ z_0 = i$; 4) $w = \mathrm{Arch}\,z,\ z_0 = -1$;

5) $w = \mathrm{Arth}\,z,\ z_0 = 1 - i$.

2.13. Найти все значения степеней:

1) 2^i; 2) $(-1)^i$; 3) $(1+i)^i$;

4) $(-1)^{\sqrt{2}}$; 5) $(3-4i)^{1+i}$; 6) $(-3+4i)^{1+i}$.

2.14. Решить уравнения:

1) $e^z - i = 0$; 2) $e^{ix} = \cos \pi x$;

3) $\mathrm{Ln}(z-i) = 0$; 4) $\operatorname{sh} iz = -1$.

Ответы

2.1 1) $2(\varphi+\pi k),\ k=0,\pm1,\ldots$ 2) $3\varphi+2\pi k,\ k=0,\pm1,\ldots$

3) $\dfrac{1}{3}\psi+2\pi(n+3k),\ n=0,1,2;\ k=0,\pm1,\ldots$, где

$\operatorname{tg}\psi=\dfrac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi},\quad \sin\psi=\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{1+r^2+2r\cos\varphi}};$

4) $\dfrac{1}{2}\psi+\pi(n+2k),\ n=0,1;\ \ k=0,\pm1,\ldots$ где

$\operatorname{tg}\psi=\dfrac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi-8},\quad \sin\psi=\dfrac{r\sin\varphi}{\sqrt{64+r^2-16r\cos\varphi}};$

5) $\dfrac{1}{2}\psi+\pi(n+2k),\ n=0,1;\ \ k=0,\pm1,\ldots$, где

$\operatorname{tg}\psi=\dfrac{r^2\sin2\varphi}{r^2\cos2\varphi-4},\quad \sin\psi=\dfrac{r^2\sin2\varphi}{\sqrt{16+r^4-8r^2\cos2\varphi}};$

6) $\dfrac{1}{2}\psi+\pi(n+2k),\ \ n=0,1;\ \ k=0,\pm1,\ldots$, где

$\operatorname{tg}\psi=\dfrac{3r\sin\varphi}{r^2-2-r\cos\varphi},\quad \sin\psi=\dfrac{3r\sin\varphi}{\sqrt{9r^2\sin^2\varphi+(r^2-2-r\cos\varphi)^2}}.$

2.2 1) Любая область, лежащая внутри угла с вершиной в начале координат и раствора не более π/n;

2) Любая область, лежащая в полосе, параллельной действительной оси и шириной не более 2π;

3) Любая область, лежащая в полосе, параллельной мнимой оси и шириной не более $2\pi/3$;

4) Любая область, лежащая либо внутри единичного круга ($|z|<1$), либо вне его ($|z|>1$), а также любая область, лежащая либо выше, либо ниже действительной оси.

2.3 1) Прямая $x=C$ отображается в параболу $v^2=4C^2(C^2-u)$; окружность $|z|=R$ — в окружность $|w|=R^2$, проходимую дважды; луч $\operatorname{Arg}z=\alpha$ — в луч $\operatorname{Arg}w=2\alpha$; полукруг $|z|<r$, $\operatorname{Im}z>0$ — в круг $|w|<r^2$ с разрезом по отрезку положительной действительной оси.

2) *Решение.* Точки, лежащие на прямой $x=C\neq0$, записываются в

виде $z = C + iy$, а потому $w = \dfrac{1}{C+iy} = \dfrac{C}{C^2+y^2} - i\,\dfrac{y}{C^2+y^2}$. Отсюда $u = \dfrac{C}{C^2+y^2}$, $v = -\dfrac{y}{C^2+y^2}$, $u^2+v^2 = \dfrac{1}{C^2+y^2} = \dfrac{u}{C}$. Следовательно, образом прямой $x = C$ является окружность $u^2+v^2-\dfrac{u}{C} = 0$. При $C = 0$, образом прямой $x = 0$, $-\infty < y < +\infty$ является прямая $u = 0$, $-\infty < v < +\infty$ с выколотой точкой $v = 0$.
Образом окружности $|z| = R$ является окружность $|w| = \dfrac{1}{R}$.
Луч $\mathrm{Arg} z = \alpha$ т.е. луч $(0, \infty \cdot e^{i\alpha})$ отобразится в идущий из бесконечности луч $(0, \infty \cdot e^{-i\alpha})$. Полукруг $|z| < r$, $\mathrm{Im} z > 0$, отобразится в нижнюю полуплоскость с вырезанным полукругом $|w| \le \dfrac{1}{r}$, $\mathrm{Im}\, w < 0$.

2.4 $f(z)$ непрерывна в D если $\forall\varepsilon > 0\ \forall z\ \in D\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, z) > 0$, что $(|\Delta z| < \delta\ \wedge\ z + \Delta z \in D) \ \Rightarrow\ |f(z+\Delta z) - f(z)| < \varepsilon$.

2.5 1) $-2i$; 2) 1; 3) ∞; 4) 0.

2.6 Для предела при $r \to 0$ по любому лучу $re^{i\varphi}$ имеем

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2i}\left(\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} - \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}}\right) = \sin 2\varphi,$$

т. е. эти пределы различны для различных направлений — они сплошь заполняют отрезок $[-1,\ 1]$, и, следовательно, $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z}\right)$ не существует.

2.8 1) $f(0) = 0$; 2) $f(0) = 0$; 3) $f(0) = 0$

2.11 1) $\mathrm{ch}\,1\cdot\cos 1 - i\cdot\mathrm{sh}\,1\cdot\sin 1$; 2) $\cos 1$; 3) $-\,\mathrm{sh}\,2\cdot\cos 1 + i\cdot\mathrm{ch}\,2\cdot\sin 1$; 4) $(2k+1)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$; 5) $\dfrac{\pi}{2}i$; 6) $(2k+\frac{1}{4})\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$.

2.12 1) $\mathrm{Arc}\sin z = -i\mathrm{Ln}\big(iz+\sqrt{1-z^2}\big)$, $\mathrm{Arc}\sin i = 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$, $k\in\mathbb{Z}$;

2) $\mathrm{Arc}\,\mathrm{ctg}\, z = -\dfrac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$, $\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,\frac{i}{3} = k\pi + \frac{i}{2}\ln 2$, $k\in\mathbb{Z}$;

3) $\mathrm{Arc}\,\mathrm{sh}\, z = \mathrm{Ln}\,\big(z+\sqrt{z^2+1}\big)$, $\mathrm{Arc}\,\mathrm{sh}\, i = (2k+\frac{1}{2})\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$;

4) $\mathrm{Arc}\,\mathrm{ch}\, z = \mathrm{Ln}\,\big(z+\sqrt{z^2-1}\big)$, $\mathrm{Arc}\,\mathrm{ch}(-1) = (2k+1)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$;

5) $\mathrm{Arc}\,\mathrm{th}\, z = \dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\,\dfrac{1+z}{1-z}$, $\mathrm{Arc}\,\mathrm{th}(1-i) = \dfrac{1}{4}\ln 5 + \dfrac{i}{2}\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,2 + \pi i(k+\dfrac{1}{2})$, $k\in\mathbb{Z}$.

2.13 1) $e^{2k\pi}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $e^{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$;

3) $e^{(2k-\frac{1}{4})\pi}\big(\cos\dfrac{\ln 2}{2} + i\sin\dfrac{\ln 2}{2}\big)$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$;

5) $5\,e^{arctg\frac{4}{3}+2k\pi}\Big(\cos\big(\ln 5 - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\big) + i\sin\big(\ln 5 - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\big)\Big)$, $k \in \mathbb{Z}$;

6) $-5\,e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+(2k+1)\pi}\Big(\cos\big(\ln 5 - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\big) + i\sin\big(\ln 5 - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\big)\Big)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.14 1) $z = i\big(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\big)$; 2) $x = 0$; 3) $z = 1+i$; 4) $z = \pi+2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

3 Аналитические функции

3.1 Дифференцируемые функции

Понятие производной для функции комплексного переменного вводится так же, как и для функции действительного переменного.

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. Если существует конечный предел отношения $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ при $z \to z_0$, то этот предел называется *производной* в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$, а функция $f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке z_0. Таким образом,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}. \tag{3.1}$$

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в области*, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Из определения производной и свойств пределов вытекает, что на функции комплексного переменного распространяются известные из математического анализа правила дифференцирования.

В определении производной содержится требование, чтобы предел не зависел от способа стремления z к z_0. Это накладывает на дифференцируемую функцию значительно более сильные ограничения, чем на дифференцируемую функцию действительного переменного.

Функция комплексного переменного, дифференцируемая в области, обладает производными всех порядков в этой области.

Пример 3.1. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = z\mathrm{Re}z$.

Очевидно, что эта функция непрерывна на всей комплексной плоскости. Для данной функции

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)\mathrm{Re}(z+\Delta z) - z\mathrm{Re}z}{\Delta z} = \mathrm{Re}(z+\Delta z) + \\ + z\frac{\mathrm{Re}(z+\Delta z) - \mathrm{Re}z}{\Delta z}.$$

Положим $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. При $z = 0$

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \mathrm{Re}(\Delta z) = \mathrm{Re}(\Delta x + i\Delta y) = \Delta x.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0,$$

т. е. $f'(0) = 0$.

При $z \neq 0$ имеем $\dfrac{\mathrm{Re}(z+\Delta z) - \mathrm{Re}z}{\Delta z} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}$.

Если $\Delta y = 0$, т. е. $\Delta z = \Delta x$, то $\dfrac{\mathrm{Re}(z+\Delta z) - \mathrm{Re}z}{\Delta z} = 1$; если $\Delta x = 0$, т. е. $\Delta z = i\Delta y$, то $\dfrac{\mathrm{Re}(z+\Delta z) - \mathrm{Re}z}{\Delta z} = 0$.

Таким образом, если $z + \Delta z$ стремится к z по прямой, параллельной действительной оси, то отношение $\frac{\mathrm{Re}(z+\Delta z)-\mathrm{Re}z}{\Delta z}$ стремится к единице, если $z + \Delta z$ стремится к z по прямой, параллельной мнимой оси, то отношение $\frac{\mathrm{Re}(z+\Delta z)-\mathrm{Re}z}{\Delta z}$ стремится к нулю.

Для второго слагаемого имеем $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \mathrm{Re}(z + \Delta z) = \mathrm{Re}z$.

Таким образом, функция $f(z) = z\mathrm{Re}z$, непрерывная на всей комплексной плоскости, имеет производную, равную нулю при $z = 0$, и не имеет производной во всех других точках комплексной плоскости.

3.2 Условия Коши-Римана

Непрерывность функции комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ равносильна непрерывности функций u и v в точке (x, y). Аналогичное утверждение не имеет место для дифференцируемости.

Теорема 3.1. *Для того чтобы функция комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определенная в некоторой окрестности точки z_0, была дифференцируемой в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы*

1: функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемыми в *точке* $(x_0,\ y_0)$ *как функции двух действительных переменных и*

2: для этих функций выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.2}$$

При выполнении условий теоремы для производной $f'(z)$ имеет место формула

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.3}$$

В полярных координатах условия Коши-Римана (3.2) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial\varphi}, \\ \frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial\varphi}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Заданная в области G, однозначная функция $f(z)$ называется *аналитической*, если она дифференцируема в каждой точке области G. Говорят, что функция $f(z)$ *аналитична в точке*, если она аналитична в некоторой окрестности этой точки.

Действительная и мнимая части функции комплексного переменного, аналитической в некоторой области, являются функциями, гармоническими в этой области. Но если $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — произвольные гармонические функции, то функция

$F(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, вообще говоря, не будет аналитической в области. Две гармонические функции — действительная и мнимая части некоторой аналитической функции — называются *сопряженными гармоническими функциями.*

Теорема 3.2. *Для всякой функции $u(x,y)$, гармонической в односвязной области D, можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию, определяемую с точностью до произвольного постоянного слагаемого.*

Сопряженная функция определяется следующей формулой:

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + C, \tag{3.5}$$

где (x_0,y_0) и (x,y) — точки области D (интеграл не зависит от кривой, соединяющий эти точки, а зависит только от точки (x,y), если точка (x_0,y_0) фиксирована).

В ряде случаев бывает полезна следующая формула, позволяющая найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой совпадает с $u(x,y)$:

$$f(z) = u(x,y)+iv(x,y) = u(z,0)+i\int\limits_{z_0}^{z}\Big(-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)\Big)dx+iC. \tag{3.6}$$

Если вместо $u(x,y)$ дана $v(x,y)$, то искомая функция найдется в виде $F(z) = if(z)$.

Задачи

3.1. Выяснить, в каких точках дифференцируемы функции:

1) $w = \overline{z}$; 2) $w = \mathrm{Re} z$; 3) $w = z\,\mathrm{Im} z$;

4) $w = z\,\overline{z}$; 5) $w = |z|$; 6) $w = |z-1|^2$.

3.2. Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

1) $f(z) = e^{3z}$. 2) $f(z) = \mathrm{sh}\, z$. 3) $f(z) = z^n,\ z \in \mathbb{N}$;

4) $f(z) = \cos z$; 5) $f(z) = \mathrm{Ln}\, z^2$; 6) $f(z) = \sin \dfrac{z}{3}$.

3.3. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D. Доказать, что если одна из функций

$u(x,y) = \mathrm{Re} f(z)$, $v(x,y) = \mathrm{Im} f(z)$,

$r(x,y) = |f(z)|$, $\theta(x,y) = \mathrm{arg} f(z)$,

сохраняет в области постоянное значение, то и $f(z) \equiv const$ в области D.

3.4. Используя условия Коши-Римана, получить формулы для производной в полярных координатах.

3.5. Доказать, что действительная и мнимая части аналитической в области D функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ являются гармоническими в этой области функциями.

3.6. Найти области аналитичности функций и их производные:

1) $f(z) = \operatorname{tg} z$; 2) $f(z) = z \cdot e^{-z}$; 3) $f(z) = \dfrac{z \cos z}{1+z^2}$;

4) $f(z) = \dfrac{e^z+1}{e^z-1}$; 5) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}$; 6) $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$;

7) $f(z) = \operatorname{cth} z$; 8) $f(z) = \dfrac{\cos z}{\cos z - \sin z}$.

Определить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ по ее действительной или мнимой части:

3.7. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \qquad 0 \le |z| < \infty.$

3.8. $v(x,y) = 2e^x \sin y, \qquad 0 \le |z| < \infty.$

3.9. $u(x,y) = 2xy + 3, \qquad 0 \le |z| < \infty.$

3.10. $v(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \qquad 0 < |z| < \infty.$

3.11. $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - 2y, \qquad 0 < |z| < \infty.$

3.12. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy, \qquad 0 \le |z| < \infty.$

3.13. $v(x,y) = xy, \qquad 0 \le |z| < \infty.$

3.14. Существует ли аналитическая функция $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, для которой:

1) $u = x^2 - \ y$; 2) $v = x^2 - y^2$;

3) $u = y/(x^2+y^2)$; 4) $v = x/y^2$?

3.15. Определить аналитическую функцию

$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ по ее действительной или мнимой части:

1) $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

2) $u = \varphi(x + y)$;

3) $u = \varphi(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

4) $v = \varphi(x^2 + y^2)$.

Ответы

3.1 1) Не дифференцируема ни в одной точке.

Указание. $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ не существует.

2) Не дифференцируема ни в одной точке.

Решение. При $\Delta y = k\Delta x$ имеем $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{1+ik}$, т. е. предел не существует.

3) Дифференцируема только в точке $z = 0$.

4) Дифференцируема только в точке $z = 0$.

5) Не дифференцируема ни в одной точке.

Решение. В точке $z = 0$ $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|z+\Delta z| - |z|}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\Delta z|}{\Delta z}$ не существует.

Если же $z \neq 0$ то, обозначая $|z| = r, \Delta z = \Delta\rho\, e^{i\varphi}$, имеем $\dfrac{|z+\Delta z| - |z|}{\Delta z} =$

$$= \frac{r\left(\sqrt{1+\frac{2\Delta\rho}{r^2}(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + (\frac{\Delta\rho}{r})^2} - 1\right)}{\Delta\rho\, e^{i\varphi}}.$$ Отсюда найдем

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{r\left(\sqrt{1+\frac{2\Delta\rho}{r^2}x + (\frac{\Delta\rho}{r})^2} - 1\right)}{\Delta\rho} = \frac{x}{r} \quad \text{при } \varphi = 0 \text{ и}$$

$$\lim_{i\Delta\rho\to 0}\frac{r\left(\sqrt{1+\frac{2\Delta\rho}{r^2}y + (\frac{\Delta\rho}{r})^2} - 1\right)}{i\Delta\rho} = -\frac{iy}{r} \quad \text{при } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|z+\Delta z| - |z|}{\Delta z}$ не существует.

6) Дифференцируема только в точке $z = 1$.

3.2 1) $(e^{3z})' = 3e^{3z}$, 2) $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$,

3) $(z^n)' = nz^{n-1}$ (кроме точки $z = 0$ при отрицательных n),

4) $(\cos z)' = -\sin z$, 5) $(\mathrm{Ln} z^2)' = 2/z$, 6) $(\sin\dfrac{z}{3})' = \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{z}{3}$.

3.3 *Указание.* Воспользоваться условиями Коши-Римана.

3.4 $f'(z) = \dfrac{r}{z}(\dfrac{\partial u}{\partial r} + i\dfrac{\partial v}{\partial r}) = \dfrac{1}{z}(\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} - i\dfrac{\partial v}{\partial \varphi})$.

3.6 1) Вся плоскость, кроме точек $z = (k + \dfrac{1}{2})\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; $(\operatorname{tg} z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$.

2) Вся плоскость; $f'(z) = e^{-z}(1-z)$.

3) Вся плоскость, кроме точек $z_{1,2} = \pm\, i$;
$f'(z) = \dfrac{(1-z^2)\cos z - z(1+z^2)\sin z}{(1+z^2)^2}$.

4) Вся плоскость, кроме точек $z_\nu = 2\pi\nu i,\ \nu \in \mathbb{Z}$; $f'(z) = -\dfrac{2e^z}{(e^z-1)^2}$.

4) Вся плоскость, кроме точек $z_\nu = \frac{\pi}{2}\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}$; $f'(z) = \cos 2z$.

5) Вся плоскость, кроме точки $z = 0$, $f'(z) = \frac{e^z(z-1)}{z^2}$.

6) Вся плоскость, кроме точек $z_k = \pi k i,\ k \in \mathbb{Z}$; $f'(z) = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$.

7) Вся плоскость, кроме точек $z_k = (k + \dfrac{1}{4})\pi, k \in Z$; $f'(z) = \dfrac{1}{1-\sin 2z}$.

3.7 $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + C, \qquad f(z = x+iy) = (x+iy)^3 + Ci = z^3 + Ci.$

3.8 $u(x,y) = 2e^x\cos y + C, \qquad f(z) = 2e^z + C.$

3.9 $v(x,y) = -x^2 + y^2 + C, \qquad f(z) = -iz^2 + 3 + iC.$

3.10 $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C, \qquad f(z) = \mathrm{Ln} z + C.$

3.11 $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + 2x + C, \qquad f(z) = \dfrac{1}{z} + 2iz + iC.$

3.12 $v(x,y) = -\dfrac{1}{2}(x^2-y^2) + 2xy + C, \qquad f(z) = \dfrac{2-i}{2}\, z^2 + iC.$

3.13 $u(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2-y^2) + C, \qquad f(z) = \frac{1}{2}z^2 + C.$

3.14 1) Нет, 2) да, $f(z) = iz^2$, 3) да, $f(z) = \dfrac{i}{z}$, 4) нет.

3.15 1) $f(z) = i\alpha\ln z + C$, α — вещественная постоянная,

2) $f(z) = (1+i)\alpha z + C$, α — вещественная постоянная,

3) $f(z) = \alpha\sqrt{z} + \beta + i\gamma$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — вещественные постоянные,

4) $f(z) = \alpha i \mathrm{Ln} z + i\beta + \gamma$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — вещественные постоянные.

4 Многозначные функции

4.1 Регулярные ветви многозначных функций

Под *кривой* γ понимается множество точек комплексной (возможно, расширенной) плоскости, которое можно представить как образ отрезка $[\alpha, \beta]$ при каком-либо непрерывном отображении $z = \gamma(t)$. Кратко это можно записать следующим образом: $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$, т. е. каждой точке отрезка сопоставляется по правилу γ точка (расширенной) комплексной плоскости.

Кривая, не имеющая точек самопересечения, называется *простой* кривой.

Кривая $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ называется *жордановой*, если отображение γ непрерывно и взаимно однозначно. Кривая называется *непрерывно дифференцируемой*, если в каждой точке $t \in [\alpha, \beta]$ существует непрерывная производная $\gamma'(t)$ ($\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ для $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и такая же комбинация соответствующих односторонних производных на концах) и *гладкой*, если $\gamma'(t) \neq 0$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$.

Кривая называется *кусочно гладкой*, если $\gamma(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и $[\alpha, \beta]$ можно разбить на конечное число отрезков таких, что сужение $\gamma(t)$ на каждый из них определяет гладкую кривую.

Две кривые γ_1 и γ_2 называются *гомотопными в области* D, если их можно непрерывно деформировать друг в друга внутри D. Любая замкнутая кривая в односвязной области D гомотопна нулю. Понятие гомотопных кривых понадобится при изучении интегралов от комплексной функции.

Пусть в некоторой области D задана многозначная функция $F(z)$. (Простейшим примером многозначной функции является функция Arg, которую мы разберем в этом разделе. Так же многозначными являются функции $\mathrm{Ln} z$, $\sqrt[n]{z}$ и т. д.)

Однозначная и непрерывная в области D функция $f(z)$ называется *однозначной и непрерывной ветвью* многозначной функции $F(z)$, если значение $f(z)$ в каждой точке D совпадает с одним из значений $F(z)$.

Аналитическая в области D функция $f(z)$ называется *регулярной ветвью* многозначной функции $F(z)$, если значение $f(z)$ в каждой точке D совпадает с одним из значений $F(z)$.

Пусть функция $F(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки a и неоднозначна в этой окрестности. Тогда точка a называется *изолированной точкой ветвления* функции $F(z)$.

4.2 Многозначная функция $\mathrm{Arg} z$

Полярные и декартовы координаты точки z связаны известными формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{4.1}$$

Если известны полярные координаты (r, φ), то декартовы координаты (x, y) определяются однозначно. Однако $\varphi = \mathrm{Arg} z$ определяется с точностью до $2k\pi$. Это не играет существенной роли при исследовании однозначных функций, но неоднозначность становится весьма существенной при исследовании многозначных функций.

Формулы перехода (4.1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между всей комплексной областью z и множеством $\{0 < r < \infty, -\pi < \varphi \leq \pi\} \cup \{r = 0, \varphi = 0\}$ на плоскости (r, φ). Последнее не является областью, в то время как плоскость z является. Взаимно однозначное соответствие между областями получается, если рассмотреть полуполосу П: $\{0 < r < \infty, -\pi < \varphi < \pi\}$. На плоскости z полуполосе П отвечает область D_0: плоскость с разрезом по полуоси $(-\infty, 0]$.

В области D_0 полярный угол φ будем отсчитывать от полуоси $x > 0$ (при $x > 0$ полагаем $\varphi = 0$). Тогда φ будет изменяться в пределах $-\pi < \varphi < \pi$, и каждой точке $z \in D_0$ отвечает только одно значение $\varphi = \varphi(z)$. Отображение полуполосы П на область D_0 бесконечно дифференцируемо, взаимно однозначно и его якобиан $J = r$ нигде не обращается в нуль.

Функция $\varphi(z)$ однозначно определяется уравнениями

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{4.2}$$

так как $-\pi < \varphi < \pi$. В любой точке D_0 значение $\varphi(z)$ совпадает с одним из значений многозначной функции Arg$z$. Поэтому $\varphi(z)$ является *однозначной непрерывной ветвью* функции Arg$z$. Эту ветвь будем обозначать $\varphi = \arg z$. В области D_0 существует бесконечно много непрерывных однозначных ветвей $\varphi_k(z)$ функции Arg$z$. Все они описываются формулами $\varphi_k(z) = \varphi(z) + 2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Функцию $\varphi = \arg z$ можно выразить через обратные тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} &\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, && x > 0; \\ &\arg z = \pm\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, && x < 0, y \gtrless 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Для произвольной области нельзя получить простую формулу, выражающую непрерывную ветвь функции Arg$z$ через обратные тригонометрические функции.

Пусть гладкая кривая γ не проходит через точку $z = 0$. Угол поворота вектора z при движении точки z вдоль кривой от начальной до конечной точки назовем приращением аргумента z вдоль кривой γ и обозначим его $\Delta_\gamma \mathrm{Arg} z$ (рис. 4.1).

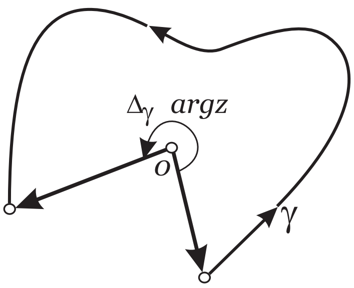


Рис. 4.1.

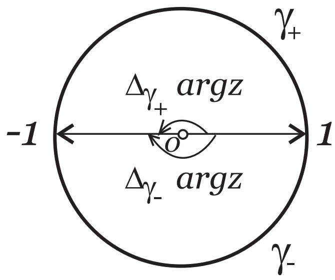
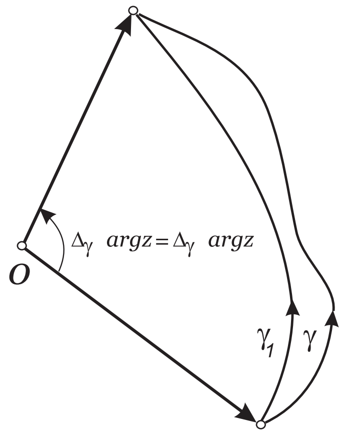


Рис. 4.2.

Если γ — отрезок прямой с началом в точке $1-i$ и концом в точке $1+i$, то $\Delta_\gamma \mathrm{Arg} z = \frac{\pi}{2}$;
если γ_+ — полуокружность $|z|=1$, $\mathrm{Im} z \geq 0$, ориентированная против часовой стрелки, то $\Delta_{\gamma_+} \mathrm{Arg} z = \pi$ (рис. 4.2);
если γ_- — полуокружность $|z|=1$, $\mathrm{Im} z \leq 0$, ориентированная по часовой стрелке, то $\Delta_{\gamma_-} \mathrm{Arg} z = \pi$ (рис. 4.2).
Можно показать, что

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg} z = \int\limits_\gamma \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

Свойства приращения аргумента.



1. Пусть кривую γ можно непрерывно деформировать в кривую γ_1, не проходя при этом через точку $z = 0$. Тогда имеет место равенство

$$\Delta_\gamma \text{Arg} z = \Delta_{\gamma_1} \text{Arg} z.$$

   (Кривые на рис. 4.2 не удовлетворяют этому условию и для них не выполняется данное равенство.)

2. Если замкнутая кривая γ не проходит через точку $z = 0$ и эту кривую можно непрерывно деформировать в точку, не проходя через $z = 0$, то $\Delta_\gamma \text{Arg} z = 0$.

3. Если кривая γ не проходит через точку $z = 0$, то

$$\Delta_\gamma \text{Arg} z = -\Delta_{\gamma^-} \text{Arg} z.$$

4. Если кривая $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$ не проходит через точку $z = 0$, то

$$\Delta_\gamma \text{Arg} z = \Delta_{\gamma_1} \text{Arg} z + \Delta_{\gamma_2} \text{Arg} z.$$

Точное определение объединения кривых и «обратной» кривой γ^- даны в параграфе 6, где введено понятие интеграла от комплексной функции.

Пусть D — односвязная область, не содержащая точек $z = 0$ и $z = \infty$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ и выберем $\arg z_0$ — одно из значений аргумента z_0. Положим

$$\arg z = \arg z_0 + \Delta_\gamma \arg z, \tag{4.4}$$

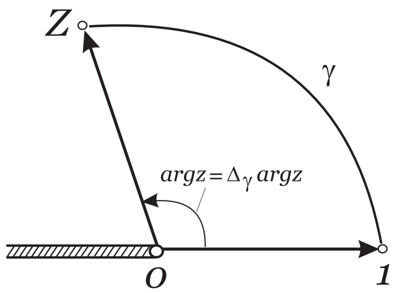
где кривая γ с началом в точке z_0 и концом в точке z лежит в D. Функция (4.4) $\arg z$ является однозначной непрерывной ветвью многозначной функции $\operatorname{Arg} z$ в области D. Таких ветвей бесконечно много,

$$(\arg z)_k = \arg z_0 + \Delta_\gamma \arg z + 2k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

т. е. многозначная функция $\operatorname{Arg} z$ в области D распадается на однозначные непрерывные ветви. Непрерывная ветвь *полностью определяется* своим значением в одной точке z_0.

Чтобы в области D можно было выделить однозначную ветвь $\arg z$, необходимо и достаточно, чтобы приращение аргумента $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z$ не зависело от кривой γ, другими словами, в области D не должно быть замкнутых кривых, содержащих внутри себя точку $z = 0$ (одновременно $z = \infty$). Точка $z = 0$ является точкой ветвления.

В уже разобранном примере с областью D_0 — комплексной плоскостью с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$ положим $z_0 = 1$ и $\arg 1 = 0$. Тогда $\arg z = \Delta_\gamma \arg z$, где кривая γ с началом в точке $z_0 = 1$ и концом в точке z лежит в D_0 (z_0 может быть и граничной точкой области). Определенная таким образом функция $\arg z$ совпадает с $\varphi(z)$ (4.3).



Задачи

4.1. Пусть D_1 — комплексная плоскость с разрезом по лучу $[0,+\infty)$ и пусть $z_0 = 1$ — точка верхнего берега разреза, $\arg 1 = 0$. Найти $\arg z$ для $z = x$ и $z = iy$.

4.2. Пусть D_2 — комплексная плоскость с разрезом по кривой $z = \frac{t}{\pi}e^{it}$, $0 \le t < \infty$. Пусть $z_0 = 5$, $\arg 5 = 2\pi$. Найти $\arg z$ для $z = -2n$ и $z = 2n+1$, $n = 0, 1, \ldots$.

4.3. Доказать, что функция $f(z) = \sqrt[3]{(1-z)^2 z}$ допускает выделение регулярной ветви во внешности отрезка $0 \le x \le 1$. Найти значение в точке $z = i$ той ее ветви, которая в точке $z = 2$ принимает положительное значение. Каковы остальные значения функции в этой точке?

4.4. Показать, что функция $f(z) = \ln(1-z^2)$ допускает выделение регулярной ветви в плоскости с вырезанными отрезками $[-1, i]$, $[1, i]$ и лучем $x = 0$, $y \ge 1$. Найти значение в точке $z = 2$ той ее ветви, которая равна 0 при $z = 0$.

4.5. Показать, что функция $w = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ допускает выделение регулярной ветви в плоскости с вырезанными лучами $-\infty < x \le -1$, $1 \le x < \infty$.

4.6. Условимся в том, что $z^z = e^{z \ln z}$, где $\ln z$ — главная ветвь логарифма, $-\pi < \mathrm{Arg} z \leq \pi$. Найти значение этой функции в точке $z = -e$ на верхнем и нижнем берегах разреза по отрицательной части вещественной оси.

Ответы

4.1 $\mathrm{Arg}(iy)=\frac{\pi}{2},\ \ y>0;\ \ \mathrm{Arg}(iy)=\frac{3\pi}{2},\ \ y<0;\ \ \mathrm{Arg}(x)=\pi,\ \ x<0$; при $x>0$ $\ \mathrm{Arg}(x+0i)=0$, $\mathrm{Arg}(x-0i)=2\pi$.

4.2 $\mathrm{Arg}(-2n)=-\pi+2\pi(n-1),\ \ n=1,2,\ldots;\ \ \mathrm{Arg}(2n+1)=-2\pi+2\pi n,$ $n=0,1,2,\ldots.$

4.3 $f_k(i)=\sqrt[3]{2}\cdot e^{i2\pi/3};\quad \sqrt[3]{2}\cdot e^{-i2\pi/3};\quad \sqrt[3]{2};\quad (k=1;2;3).$

Указание. При обходе в положительном направлении окружности, охватывающей точки 0 и 1, аргумент подкоренного выражения изменяется на 6π , следовательно, значение корня возвращается к первоначальному.

Решение. Зафиксируем на плоскости $(x,\ y)$ точку z, ее аргумент $\mathrm{arg}z$. На плоскости $(u,\ v)$ этой точке будут соответствовать точки $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ с аргументами соответственно $\mathrm{arg}\omega_1,\ \ \mathrm{arg}\omega_2,\ \ \mathrm{arg}\omega_3$, где

$\mathrm{arg}\omega_1=\dfrac{\mathrm{arg}z+2\mathrm{arg}(1-z)}{3};\quad \mathrm{arg}\omega_2=\dfrac{\mathrm{arg}z+2\mathrm{arg}(1-z)+2\pi}{3};$

$\mathrm{arg}\omega_3=\dfrac{\mathrm{arg}z+2\mathrm{arg}(1-z)+4\pi}{3}$. Пусть точка z опишет кривую γ_1, не охватывающую точки $z=0$ и $z=1$. При этом значения аргументов $\mathrm{arg}z$ и $\mathrm{arg}(1-z)$ не изменятся, не изменятся и значения $\mathrm{arg}\omega_1,\ \ \mathrm{arg}\omega_2,\ \ \mathrm{arg}\omega_3$.

Если точка z опишет контур γ_2, охватывающий точку $z=0$, то $\mathrm{arg}z$ изменится при обходе этого контура на 2π; при этом на комплексной плоскости $(u,\ v)$ аргументы точек $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ изменятся и примут, соответственно, значения

$$\mathrm{arg}\omega_1=\frac{\mathrm{arg}z+2\pi+2\mathrm{arg}(1-z)}{3}=\mathrm{arg}\omega_2;$$

$$\mathrm{arg}\omega_2=\frac{\mathrm{arg}z+2\pi+2\mathrm{arg}(1-z)+2\pi}{3}=\mathrm{arg}\omega_3;$$

$$\mathrm{arg}\omega_3=\frac{\mathrm{arg}z+2\pi+2\mathrm{arg}(1-z)+4\pi}{3}=\mathrm{arg}\omega_1.$$

При обходе контура γ_3, охватывающего точку $z=1$, $\mathrm{arg}z$ не изменится, но на 2π увеличится аргумент комплексного числа $(1-z)$. На комплексной плоскости $(u,\ v)$ при этом аргументы точек $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ изменятся и примут значения

$$\arg\omega_1 = \frac{\arg z + 2[\arg(1-z)+2\pi]}{3} = \arg\omega_3;$$

$$\arg\omega_2 = \frac{\arg z + 2[\arg(1-z)+2\pi]+2\pi}{3} = \arg\omega_1;$$

$$\arg\omega_3 = \frac{\arg z + 2[\arg(1-z)+2\pi]+4\pi}{3} = \arg\omega_2.$$

При обходе контура, который охватывает и точку 0, и точку 1, аргумент z увеличится на 2π, и аргумент $(1-z)$ увеличится на 2π, поэтому $\arg\omega_1$, $\arg\omega_2$, $\arg\omega_3$, останутся неизменными. Отсюда видно, что во внешности отрезка $0 \le x \le 1$ функция $f(z) = \sqrt[3]{z(1-z)^2}$ допускает выделение регулярной ветви. Если $z = 2$, то положительное значение будет принимать ветвь ω_3. Если $z = i$, то $z = e^{i\pi/2}$, $1-z = \sqrt{2}e^{i7\pi/4}$, $\left|\sqrt[3]{z(1-z)^2}\right| = \sqrt[3]{2}$, $\arg(\sqrt[3]{z(1-z)^2}) = \dfrac{\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{2}+4\pi}{3} = \dfrac{8}{3}\pi = 2\pi + \dfrac{2\pi}{3}$, $\sqrt[3]{z(1-z)^2} = \sqrt[3]{2}\cdot e^{i2\pi/3}$, остальные значения — $\sqrt[3]{2}\cdot e^{-i2\pi/3}$ и $\sqrt[3]{2}$.

4.4 $f(2) = \ln 3 + i\pi$.

4.5 *Указание.* Функция $w = \ln(z+\sqrt{z^2-1})$ отображает область задачи на верхнюю полуплоскость, если $w(0) = i$.

4.6 $w_1 = \exp\left(-e(1+i\pi)\right)$, $w_2 = \exp\left(-e(1-i\pi)\right)$.

5 Конформные отображения

5.1 Геометрический смысл производной

Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим гладкую кривую $\sigma : z = \gamma(t),\ \ \alpha \leq t \leq \beta$, проходящую через точку $z_0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$. (Здесь кривая обозначена символом σ, чтобы отличать образ на комплексной плоскости от гладкой функции вещественной переменной γ.) Угол между касательной к кривой в точке z_0 и положительным направлением действительной оси в плоскости z (касательная считается направленной в ту же сторону, что и кривая) обозначим через θ, тогда $\theta = \arg \gamma'(t_0)$.

Пусть σ' — образ кривой σ при отображении $w = f(z)$, т. е. $\sigma' : w = w(t) = f[[\gamma(t)],\ \alpha \leq t \leq \beta$, а точка $w_0 = f(\gamma(t_0)) = f(z_0)$ — образ точки z_0. По правилу дифференцирования сложной функции

$$w'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0). \tag{5.1}$$

Поскольку по условию $f'(z_0) \neq 0$ и $\gamma'(t_0)$ (σ — гладкая кривая), то и $w'(t_0) \neq 0$, т. е. кривая σ' имеет касательную в точке w_0. Из (5.1)

$$\theta' = \mathrm{Arg} w'(t_0) = \mathrm{Arg} f'(z_0) + \mathrm{Arg} \gamma'(t_0),$$

или

$$\theta' = \theta + \mathrm{Arg} f'(z_0). \tag{5.2}$$

Величина $\alpha = \theta' - \theta$ называется *углом поворота* кривой σ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Из (5.1) и (5.2) следует, что если $f'(z_0) \neq 0$, то угол поворота в точке z_0 не зависит от вида и направления кривой и равен $\alpha = \mathrm{Arg} f'(z_0)$.

Теперь рассмотрим произвольную точку z кривой σ, расположенную достаточно близко к точке z_0. Обозначим $\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = f(z) - f(z_0)$. Из определения производной следует, что $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) + \varepsilon(\Delta z)$, где $\varepsilon(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$, или

$$|\Delta w| = |f'(z_0)||\Delta z| + o(|\Delta z|). \tag{5.3}$$

Пусть $|z - z_0| = |\Delta z| = \rho$, где ρ фиксировано (и достаточно мало). Тогда из (5.3) окружность $|z - z_0| = \rho$ переходит при отображении $w = f(z)$ в кривую, мало отличающуюся от окружности

$$|w - w_0| = \rho |f'(z_0)|.$$

Иначе говоря, отображение $w = f(z)$ с точностью до малых более высокого порядка, чем δz, растягивает круг $|\Delta z| < \rho$ в $|f'(z_0)|$ раз.

Величина $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = k$ называется *линейным растяжением кривой* в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Линейное растяжение кривой не зависит от вида и направления кривой и равно $k = |f'(z_0)|$.

5.2 Конформное отображение и его свойства

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. Отображение $w = f(z)$ называется *конформным в точке* z_0, если оно сохраняет углы между кривыми и обладает свойством постоянства растяжений в точке z_0.

Пусть функция $f(z)$ однолистна в конечной области D и пусть отображение $w = f(z)$ является конформным в каждой точке области D. Тогда это отображение называется *конформным в области* D.

Критерий конформности отображения.

Для того, чтобы отображение конечной области D, задаваемое функцией $w = f(z)$, было конформным, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была однолистной и аналитической в области D функцией, причем $f'(z) \neq 0$ всюду в D.

Отображение $w = f(z)$ области D расширенной комплексной плоскости z на область G расширенной комплексно плоскости w называется *конформным*, если:

1) функция $f(z)$ однолистна в области D;

2) функция $f(z)$ аналитична в области D, за исключением, быть может, одной точки, в которой она имеет полюс первого порядка.

Общие свойства конформных отображений.

1. *Постоянство растяжений.* Линейное растяжение в точке z_0 одинаково для всех кривых, проходящих через эту точку и равно $|f'(z_0)|$.

2. *Сохранение углов.* Все кривые в точке z_0 поворачиваются на одинаковый угол, равный $\mathrm{Arg} f'(z)$. Углом между кривыми γ_1 и γ_2, проходящими через точку $z = \infty$, называется угол между образами этих кривых при отображении $\zeta = \dfrac{1}{z}$ в точке $\zeta = 0$. При конформном отображении области D расширенной комплексной плоскости сохраняются углы между кривыми в каждой точке этой области.

3. Отображение, *обратное к конформному*, тоже является конформным.

4. *Суперпозиция* двух конформных отображений также является конформным отображением.

5. *Принцип соответствия границ.* Если функция $w = f(z)$ конформно отображает область D с границей Γ на область

G с границей $\widetilde{\Gamma}$, Γ и $\widetilde{\Gamma}$ — простые кусочно гладкие кривые, то:

1) функцию $f(z)$ можно продолжить на замыкание области D, т. е. можно доопределить $f(z)$ на Γ так, что получится непрерывная на $\overline{D}$ функция;
2) эта функция $w = f(z)$ отображает взаимно однозначно кривую Γ на кривую $\widetilde{\Gamma}$ с сохранением ориентации.

5.3 Примеры конформных отображений

1. Отображение, осуществляемое *линейной* функцией $w = az + b$ (при $a \neq 1$, $a \neq 0$) сводится к повороту всей плоскости как целого вокруг точки $C = \dfrac{b}{1-a}$ на угол $\operatorname{Arg} a$ и к растяжению относительно этой точки в $|a|$ раз (подобному преобразованию с центром в точке C и коэффициентом подобия $|a|$).

2. *Дробно-линейная функция* $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ осуществляет конформное отображение полной комплексной плоскости на полную комплексную плоскость если $ad - bc \neq 0$; при этом

$$w\left(-\frac{d}{c}\right) = \lim_{z \to -\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty; \quad w(\infty) = \lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

Существует одно и только одно дробно-линейное отображение полной плоскости z на полную плоскость w, переводящее три произвольные точки z_k в три произвольные точки w_k:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Если одна из точек z_1, z_2, или z_3, либо w_1, w_2, или w_3 является бесконечно удаленной, то в этой формуле все разности, содержащие эту точку, следует заменить единицами.

Теорема 5.1. *Суперпозиция дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением. Отображение, обратное к дробно-линейному, тоже является дробно-линейным.*

Произвольная дробно-линейная функция преобразует любую окружность (в том числе проходящую через бесконечно-удаленную точку) расширенной комплексной плоскости z в окружность расширенной комплексной плоскости w. Точки M и M^* называют *симметричными относительно окружности* Γ с центром в точке O и радиусом R, если они лежат на одном луче, выходящем из точки O и $OM \cdot OM^* = R^2$.

Таким образом, на комплексной плоскости точки z и z^* являются симметричными относительно окружности $\Gamma : |z - a| = R$, если они лежат на одном луче, выходящем из точки a и $|z-a||z^*-a| = R^2$. Точка $z = \infty$ считается симметричной относительно окружности Γ с точкой a — центром этой окружности.

Точки z и $\overline{z}$ являются симметричными относительно действительной оси.

Теорема 5.2. *При дробно-линейном отображении любая пара точек, симметричных относительно окружности, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности.*

Пример 5.1. . Найти образ круга $|z-1|<2$ при отображении $w = \dfrac{2iz}{z+3}$.

Имеем $w(z) = u + iv$. Найдем образы точек -1 и 3: $w(-1) = -2i/2 = -i$; $w(3) = 6i/6 = i$. Найдем образ действительной оси, $w(x) = 2ix/(x+3) = iv$. Получаем, что образом действительной оси плоскости z является мнимая ось плоскости w. Образом окружности при отображении с помощью дробно-линейной функции является окружность. Через точки i и $-i$ можно провести только одну окружность, пересекающую мнимую ось под прямым углом (при конформном отображении углы сохраняются) — $|z| = 1$. Найдем образ внутренней точки, $w(0) = 0$. Следовательно, образом $|z-1|<2$ круга является круг $|z|<1$.

3. **Функция Жуковского** $\quad w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right), \quad (z \neq 0)$ конформно отображает внутренность единичного круга на внеш-

ность отрезка $[-1;\,1]$ действительной оси u. При этом верхний полукруг отображается в нижнюю полуплоскость, нижний полукруг — в верхнюю полуплоскость. Внешность круга функция Жуковского отображает на внешность отрезка оси u, но при этом верхняя полуплоскость с исключенным полукругом переходит в верхнюю полуплоскость, а нижняя полуплоскость с исключенным полукругом — в нижнюю полуплоскость.

Пример 5.2. Найти образ полярной координатной сетки при отображении функцией Жуковского.

Полярную координатную сетку составляют окружности $|z| = \rho$ и лучи $\mathrm{Arg} z = \alpha$. Имеем $w(z) = 1/2(z + 1/z) = u + iv$. Полагая $z = re^{i\varphi}$, получим

$$u = \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\Big(r - \frac{1}{r}\Big)\sin\varphi.$$

Рассмотрим окружность $z = \rho e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ ($\rho > 0$ фиксировано). Образом окружности является эллипс

$$u = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\Big(\rho - \frac{1}{\rho}\Big)\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

с полуосями $a_\rho = \frac{1}{2}(\rho + 1/\rho)$, $b_\rho = \frac{1}{2}|\rho - 1/\rho|$ и с фокусами в точках $w = \pm 1$ (так как $a_\rho^2 - b_\rho^2 = 1$). Исключая параметр φ, при $\rho \ne 1$ уравнение этого эллипса можно записать в каноническом виде

$$\frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} = 1.$$

При замене ρ на $1/\rho$ эллипс остается тем же самым, но его ориентация меняется на противоположную (при $0 < \rho < 1$ окружность, ориентированная против часовой стрелки, переходит в эллипс, ориентированный по часовой стрелке). При $\rho = 1$ эллипс вырождается в отрезок $[-1, 1]$, проходимый дважды.

Теперь рассмотрим луч $z = re^{i\alpha}$, $0 < r < \infty$ (α — фиксировано). при отображении функцией Жуковского образом этого луча является кривая

$$u = \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)\cos\alpha, \quad v = \frac{1}{2}\Big(r - \frac{1}{r}\Big)\sin\alpha, \quad 0 < r < \infty.$$

Исключая параметр r, при $\alpha \neq k\pi/2$ (k — целое), получаем

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1.$$

Это гипербола с фокусами в точках $w = \pm 1$ и с асимптотами $v = \pm \mathrm{tg}\alpha$.

Луч $z = re^{i\alpha}$ при $0 < \alpha < \pi/2$ переходит в правую ветвь гиперболы, при $\pi/2 < \alpha < \pi$ — в левую. При замене α на $-\alpha$ получается та же ветвь гиперболы, но ее ориентация меняется на противоположную.

Рассмотрим лучи при $\alpha = k\pi/2$. Луч $\mathrm{Arg}z = \pi/2$ переходит в мнимую ось $\mathrm{Re}w = 0$. Луч $\mathrm{Arg}z = 3\pi/2$ также переходит в мнимую ось $\mathrm{Re}w = 0$. Луч $\mathrm{Arg}z = 0$ переходит в луч $[1, +\infty)$, проходимый дважды: луч $[1, +\infty)$ переходит в луч $[1, +\infty)$, и полуинтервал $(0,1]$ переходит в луч $(+\infty,1]$. Аналогично, луч $\mathrm{Arg} z=\pi$ переходит в луч $(-\infty,-1]$, проходимый дважды.

4. *Степенная функция* $w=z^n$ осуществляет конформное отображение внутренности любого угла с прямолинейными сторонами с вершиной в точке $z=0$ и с раствором α, $0<\alpha\le\dfrac{2\pi}{n}$ на внутренность соответствующего угла, также с прямолинейными сторонами, вершиной в начале координат и раствором $n\alpha$.

5. *Показательная функция* $w=e^z$ осуществляет конформное отображение внутренности любой полосы шириной $h\le 2\pi$, параллельной действительной оси, на внутренность угла раствора h с вершиной в начале координат.

6. *Функция* $w=\sin z$ осуществляет конформное отображение внутренности полосы $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ (а также любой полосы $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{2}+k\pi$) плоскости z на плоскость w с исключенным бесконечным отрезком действительной оси, соединяющим точки -1, 1 через бесконечно удаленную точку. При этом верхняя полуполоса $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, $y>0$ переходит в верхнюю полуплоскость $u>0$, а нижняя полуполоса $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, $y<0$ — в нижнюю полуплоскость $u<0$.

7. *Функция* $w=\cos z$ осуществляет взаимно однозначное отображение полосы $0\le x\le\pi$ плоскости z на полную плоскость w, разрезанную по лучам действительной оси $[1;\infty)$ и

$[-1; -\infty)$. При этом верхняя полуполоса $0 \le x \le \pi$, $y > 0$ переходит в нижнюю полуплоскость $u < 0$, а нижняя полуполоса $0 \le x \le \pi$, $y < 0$ — в верхнюю полуплоскость u>0.

8. *Радикал* — функция, обратная к степенной функции $w = z^n$: $z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{Argw}{n} + i\sin\frac{Argw}{n}\right)$.

Пример 5.3. . Найти образ комплексной плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ при отображении $w = \sqrt{z}$.

Если D_0 — плоскость z с разрезом по лучу $[0, +\infty)$, то функция $\sqrt{z}$ распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где $f_1(x+i0) = \sqrt{x} > 0$ при $x > 0$, т. е. $f_1(z)$ принимает положительные значения на верхнем берегу разреза. Функция $w = f_1(z)$ конформно отображает область D_0 на верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im} w > 0$, а функция $w = f_2(z)$ конформно отображает область D_0 на нижнюю полуплоскость $\mathrm{Im} w < 0$.

9. *Функция* $w = Ln\ z$ является аналитической в плоскости z с выколотыми точками $z = 0$ и $z = \infty$, а в плоскости с разрезом, соединяющим эти точки, распадается на бесконечное число регулярных ветвей.

В области D_0 (с разрезом по лучу $[0, +\infty)$) $\mathrm{Ln} z$ распадается на регулярные ветви

$$(\mathrm{ln} z)_k = \ln|z| + i(\mathrm{Arg} z)_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

где $0 < (\mathrm{Arg} z)_0 < 2\pi$. Функция $(\ln z)_k$ конформно отображает D_0 на полуполосу $2k\pi < \mathrm{Im} w < 2(k+1)\pi$.

Функция $w = \ln z$ конформно отображает сектор $0 < \mathrm{Arg} z < \alpha \leq 2\pi$ на полосу $0 < \mathrm{Im} w < \alpha$.

Задачи

5.1. Найти образы следующих линий при отображении $w = \dfrac{1}{z}$:

1) окружности $x^2 + y^2 = 2x$; 2) окружности $x^2 + y^2 = y/3$;

3) прямой $y = -x/2$; 4) прямой $y = x - 1$;

5) окружности $x^2+y^2+2(x-y)+1 = 0$.

5.2. Доказать, что проходящая через начало координат окружность $A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy = 0$ преобразуется функцией $w = 1/z$ в прямую, а любая прямая $Bx + Cy + D = 0$ при $D \neq 0$ — в окружность, проходящую через начало координат. При $D = 0$ данная прямая преобразуется в окружность бесконечного радиуса (т. е. прямую), так же проходящую через начало координат.

5.3. Найти дробно-линейное преобразование, если:

1) точки $i,\ 1,\ 1+i$ переходят в точки $0,\ \infty, 1$;

2) точки 1 и i неподвижны, а точка 0 переходит в ∞;

3) точки 1/2 и 2 неподвижны, а $5/4 + i\,3/4$ переходит в ∞.

5.4. Найти образы областей при отображении $w = \dfrac{1}{2}\,(z + \dfrac{1}{z})$:

1) внутренности круга $|z| < R$ при $R < 1$ и внешности круга $|z| > R$ при $R > 1$;

2) внутренности круга $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[1/2; 1]$;

3) внутренности круга $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[-1/2; 1]$.

5.5. Найти образы E заданных областей при отображении $w = \ln z,\ \ w(i) = \dfrac{\pi i}{2}$:

1) $\{z|\ \mathrm{Im}z > 0\}$; 2) $\{z|\ |z| < 1,\ \mathrm{Im}z > 0\}$;

3) $\{z|\,|z| < 1, z \notin [0,1]\}$; 4) $\{z|z \notin [-\infty,-1] \cup [0,\infty]\}$.

5.6. Найти образ полосы $\{z|\ 0 < \mathrm{Re}z < \frac{\pi}{2}\}$ при отображении $w = \cos z$.

5.7. Найти образ полосы $\{z|\ -\frac{\pi}{4} < \mathrm{Re}z < \frac{\pi}{4}\}$ при отображении $w = \mathrm{tg}\, z$.

5.8. Найти образ прямоугольной сетки $x = C$, $y = C$ при отображении $w = \mathrm{ch}\, z$.

5.9. Пусть D — плоскость с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$. Найти образ D при отображении $w = \sqrt{z}$.

5.10. Круг $|z| < 1$ повернуть на 180^0 и увеличить вдвое его радиус.

5.11. Перевести круг $|z - a| < R$ на круг $|w| < 1$.

5.12. Полуплоскость (рис. 5.1.) отобразить на верхнюю полуплоскость.

5.13. Четверть плоскости (рис. 5.2.) перевести в первый координатный угол так, чтобы точка b перешла в 1.

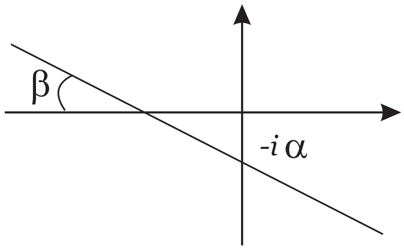


Рис. 5.1.

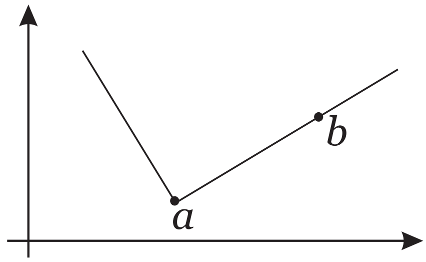
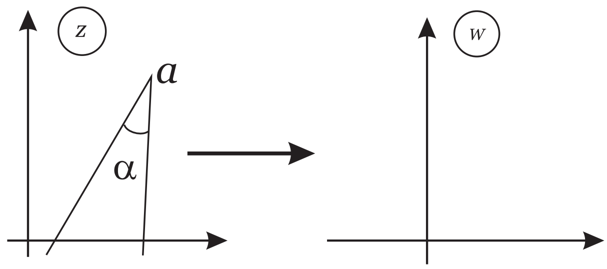


Рис. 5.2.

5.14. Сектор $0 < \mathrm{Arg}z < \alpha$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы точка a из сектора перешла в $w = 0$.

5.15. Сектор $0 < \mathrm{Arg}z < \alpha$ с вершиной в точке a на верхнюю полуплоскость.



5.16. Область $\{\mathrm{Im}\, z > 0, \ \ |z| > R\}$ на верхнюю полуплоскость с соответствием $\infty \to \infty$.

5.17. Круг $|z| < r$ с разрезом по отрезку $[0, r]$ на круг $|w| < 1$.

5.18. Полосу $0 < \operatorname{Im} z < 2h$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы ih переходила в 0.

5.19. Полуполосу $\operatorname{Im} z > 0$, $0 < \operatorname{Re} z < h$ на верхнюю полуплоскость.

5.20. Внешность двуугольника, ограниченного дугами окружностей, которые пересекаются в точках a, b, на $|w| > 1$.

5.21. Плоскость с разрезами по вещественной оси: $-\infty < x < \alpha$, $\beta < x < +\infty$ — на верхнюю полуплоскость.

5.22. Область, составленную из верхней полуплоскости и полукруга $(|z| < R, \ \operatorname{Im} z < 0)$ на верхнюю полуплоскость с условием: ∞ переходит в ∞.

5.23. Плоскость с разрезом по отрезку $[\,\alpha, \ \beta\,]$ вещественной оси на $|w| > 1$.

5.24. $|z| < 1$ на $|w| < 1$ с соответствием $a \to 0$.

5.25. Область $\{|z+2| > 2, \ |z-2| > 1\}$ на кольцо $\rho < |w| < 1$.

5.26. $\{|z-3| > 9, \ |z-8| < 16\} \ \to \ \rho < |w| < 1$. Чему равно ρ?

5.27. $\{\,|z-1| > 1, \ |z| < 4\,\} \ \to \ 1 < |w| < \rho$.

5.28. Найти конформное отображение верхней полуплоскости на себя, преобразующее точки $\infty, 0, 1$ в точки $0, 1, \infty$.

5.29. Отобразить верхнюю полуплоскость с разрезом по отрезку $[\,a,\ a+ih\,]$ на верхнюю полуплоскость.

5.30. Отобразить горизонтальную полосу шириной H с разрезом по отрезку $[a, a+ih]$ на горизонтальную полосу шириной 1.

Ответы

5.1 1) *Решение.* Полагая $z = x + iy$ имеем $x = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$, $y = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Подставляя эти значения в уравнение окружности, находим $x^2 + y^2 - 2x = z \cdot \overline{z} - (z + \overline{z}) = 0.$ и после замены $w = \dfrac{1}{z}$ имеем $\dfrac{1}{w\overline{w}} - \dfrac{1}{w} - \dfrac{1}{\overline{w}} = 0$, т.е.

$w + \overline{w} = 1$. Если $w = u + iv$, то $w + \overline{w} = 2u = 1$. Таким образом, окружность $x^2 + y^2 = 2x$ преобразуется в прямую $u = \dfrac{1}{2}$, параллельную мнимой оси.

2) Прямая $v = -3$. 3) Прямая $u - 2v = 0$.

4) Окружность $u^2+v^2-u-v = 0$. Окружность $u^2+v^2+2u+2v+1 = 0$.

5.3 1) $w = i\dfrac{z-i}{z-1}$ 2) $w = \dfrac{(i+1)z - i}{z}$ 3) $w = \dfrac{(5-3i)z-4}{4z-5-3i}$.

5.4 1) Как внутренность круга $|z| < R$ при $R < 1$, так и внешность круга $|z| > R$ при $R > 1$ отобразятся на внешность эллипса

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}(R + \frac{1}{R})^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}(R - \frac{1}{R})^2} = 1.$$

2) Плоскость с разрезом по отрезку $[-1;\ 5/4]$.

3) Плоскость с разрезом по лучам $(-\infty;\ -5/4]$, $[1; +\infty)$.

5.5 1) $E = \{w|\ 0 < \mathrm{Im}w < \pi\}$, 2) $E = \{w|\ \mathrm{Re}w < 0,\ 0 < \mathrm{Im}w < \pi\}$,

3) $E = \{w|\ \mathrm{Re}w < 0,\ 0 < \mathrm{Im}w < 2\pi\}$,

4) $E = \{w|\ 0 < \mathrm{Im}\, w < 2\pi,\ w \neq u + i\pi$ для $u > 0\}$.

5.6 Правая полуплоскость с исключенным лучем $1 < u < \infty,\ v = 0$.

5.7 Круг $|w| < 1$.

5.8 Прямые $x = C$ преобразуются в эллипсы $\dfrac{u^2}{\mathrm{ch}^2\, C} + \dfrac{v^2}{\mathrm{sh}^2\, C} = 1$, а прямые $y = C$ в гиперболы $\dfrac{u^2}{\cos^2 C} - \dfrac{v^2}{\sin^2 C} = 1$.

5.9 Функция $f_1(z)$, определяемая значением $f_1(1) = 1$, отображает область

D на полуплоскость $\mathrm{Re}z > 0$, а функция $f_2(z) = -f_1(z)$ — на полуплоскость $\mathrm{Re}z < 0$.

5.10 $w = -2z$. **5.11** $w = \dfrac{1}{R}(z-a)$. **5.12** $w = -(z+i\alpha)e^{i\beta}$.

5.13 $w = (z-a)/(b-a)$. **5.14** $w = (z^{\pi/\alpha} - a^{\pi/\alpha}) \Big/ (z^{\pi/\alpha} - \overline{a}^{\pi/\alpha})$.

5.15 $w = -(z-a)^{\pi/\alpha} \cdot e^{i\pi^2/(2\alpha)}$. **5.16** $w = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{R} + \dfrac{R}{z}\right)$.

5.17 $w = \dfrac{z + r + i2\sqrt{rz}}{z + r - i2\sqrt{rz}}$. **5.18** $w = \dfrac{e^{(\pi/2h)z} - i}{e^{(\pi/2h)z} + i}$.

5.19 $w = -\cos\dfrac{\pi z}{h}$. **5.20** $w = \dfrac{\left[\frac{z-a}{z-b}e^{-i(\alpha+\beta)}\right]^{\pi/(2\pi-\alpha)} + i}{\left[\frac{z-a}{z-b}e^{-i(\alpha+\beta)}\right]^{\pi/(2\pi-\alpha)} - i}$.

5.21 $w = \sqrt{\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}}$. **5.22** $w = \left[1 - \left(\dfrac{z-R}{z+R}\right)^{2/3}\right]^{-1}$.

5.23 $w = \dfrac{1}{\beta - \alpha}[2z + 2\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} - (\alpha+\beta)]$.

5.24 $w = e^{i\alpha} \cdot \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$, α — произвольная вещественная постоянная.

5.25 $w = e^{i\alpha} \cdot \dfrac{8z - (3-\sqrt{105})}{8z - (3+\sqrt{105})} \cdot \dfrac{13 - \sqrt{105}}{8}$, $\rho = \dfrac{11 - \sqrt{105}}{4}$.

5.26 $w = e^{i\alpha} \cdot \dfrac{2z}{z+24}$, $\rho = \dfrac{2}{3}$.

5.27 $w = e^{i\alpha} \cdot \dfrac{z - 8 + \sqrt{48}}{z - 8 - \sqrt{48}} \cdot (7 + \sqrt{48})$, $\rho = 2 + \sqrt{3}$.

5.28 $w = \dfrac{1}{(1-z)}$. **5.29** $w = \sqrt{(z-a)^2 + h^2}$.

5.30 $w = \dfrac{2}{\pi} \cdot \mathrm{Arc\,th}\left[\sqrt{\mathrm{th}^2\dfrac{\pi(z-a)}{2H} + \mathrm{tg}^2\dfrac{\pi h}{2H}} \cdot \cos\dfrac{\pi h}{2H}\right]$.

6 Интеграл от функции комплексного переменного

6.1 Понятие интеграла и первообразной

Пусть задана кусочно гладкая кривая $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$, где $I = [\alpha, \beta]$ — отрезок действительной оси, и на образе $\gamma(I)$ задана комплексная функция f такая, что функция $f \circ \gamma$ непрерывна на I. *Интегралом* от функции f по кривой γ называется

$$\int\limits_{\gamma} f\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f \circ \gamma(t)\gamma'(t)\,dt, \tag{6.1}$$

где в правой части интеграл от комплексной функции $f \circ \gamma(t)\gamma'(t) = g_1(t) + i\,g_2(t)$ действительного аргумента t понимается как $\int\limits_{\alpha}^{\beta} g_1(t)\,dt + i \int\limits_{\alpha}^{\beta} g_2(t)\,dt$.

Не вдаваясь в тонкости, тем не менее отметим, что один и тот же образ на плоскости z можно получить как с помощью отображения $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$, так и с помощью отображения $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow \mathbb{C}$. Если кривая γ_1 получается из кривой γ допустимой заменой параметра, т. е. $\gamma = \gamma_1 \circ \tau$, где τ — возрастающее кусочно гладкое отображение $[\alpha, \beta]$ на $[\alpha_1, \beta_1]$, то для любой непрерывной на γ (следовательно, и на γ_1) функции

$$\int_{\gamma} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz.$$

Именно поэтому понятие интеграла по кривой имеет смысл. Это свойство называют свойством *инвариантности* интеграла от комплексной функции.

Если положить $f = u + iv$ и $dz = \gamma'(t)\,dt = dx + i\,dy$, то интеграл (6.1) можно переписать в виде криволинейного интеграла по координатам

$$\int_{\gamma} f\,dz = \int_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\int_{\gamma} v\,dx + u\,dy. \tag{6.2}$$

Пример 6.1. Пусть γ — окружность $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ и $f(z) = (z-a)^n$, где $n = \pm 1, \dots$ — произвольное целое число. Имеем $\gamma'(t) = ire^{it}$, $f \circ \gamma(t) = r^n e^{int}$ и по формуле (6.1) имеем

$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)} dt.$$

При $n \neq -1$ имеем

$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz = r^{n+1} \frac{e^{i(n+1)2\pi} - 1}{n+1} = 0$$

в силу периодичности показательной функции, а при $n = -1$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Пример 6.2. Этот пример — обобщение предыдущего. Пусть $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ — произвольный гладкий путь и $n \neq -1$ — произвольное целое число. При $n < 0$ предположим, что кривая не проходит через точку $z = 0$ ($\gamma(t) \neq 0$ на I). По правилу дифференцирования сложных функций $\dfrac{d}{dt}\gamma^{n+1}(t) = (n+1)\gamma^n(t)\gamma'(t)$, следовательно

$$\int\limits_\gamma z^n\,dz = \int\limits_\alpha^\beta \gamma^n(t)\gamma'(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\big(\gamma^n(\beta) - \gamma^n(\alpha)\big).$$

Интегралы от z^n не зависят от вида пути, а определяются лишь его началом и концом. По замкнутым кривым (при $n < 0$ не проходящим через $z = 0$) они равны нулю.

Некоторые основные свойства интеграла от комплексных функций.

1. *Линейность.* Если f и g непрерывны на кусочно гладкой кривой γ, то для любых комплексных постоянных a и b
$\displaystyle\int\limits_\gamma (af + bg)\,dz = a\int\limits_\gamma f\,dz + b\int\limits_\gamma g\,dz.$

2. *Аддитивность.* Пусть даны две кусочно гладкие кривые $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ и $\gamma_2 : [\beta_1, \beta_2] \longrightarrow \mathbb{C}$. *Объединением* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ назовем кривую $\gamma : [\alpha_1, \beta_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ такую, что

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{для} \quad t \in [\alpha_1, \beta_1], \\ \gamma_2(t) & \text{для} \quad t \in [\beta_1, \beta_2]. \end{cases}$$

Для любой непрерывной на $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ функции f

$$\int\limits_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f\,dz.$$

Если $\gamma_1(\beta_1) \neq \gamma_2(\beta_2)$, то $\gamma_1 \cup \gamma_2$ уже не является непрерывной кривой, но свойство аддитивности сохраняется.

3. *Ориентированность.* Обозначим через γ^- кривую, которая получается из кусочно гладкой кривой $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ заменой переменных $t \to \alpha + \beta - t$ ($\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t)$, $t \in [\alpha, \beta]$). Если f — функция, непрерывная на γ, то $\int\limits_{\gamma^-} f\,dz = -\int\limits_{\gamma} f\,dz$.

Первообразной функции f в области D называется такая аналитическая в этой области функция F, что в каждой точке $z \in D$ $F'(z) = f(z)$.

Пусть в области D задана функция f и $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ — произвольная (непрерывная) кривая. Функцию $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ будем называть *первообразной функции f вдоль кривой γ*, если она:
1) непрерывна на I и 2) для любой точки $t_0 \in I$ существует окрестность $U \subset D$ точки $z_0 = \gamma(t_0)$, в которой f имеет первообразную F_U такую, что $F_U \circ \gamma(t) = \Phi(t)$.

Если f имеет первообразную F во всей области D, то функция $F \circ \gamma(t)$ будет служить первообразной вдоль кривой γ. Но в определении не требуется существования первообразной во всей D, достаточно, чтобы она существовала локально. Первообразная вдоль кривой, являясь функцией t, может не быть функцией z.

Теорема 6.1. *Для любой аналитической в D функции f и любой непрерывной кривой $\gamma : I \longrightarrow D$ первообразная f вдоль γ существует и определяется с точностью до постоянного слагаемого.*

Теорема 6.2. *Если $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ — кусочно гладкая кривая и функция f непрерывна на γ и имеет первообразную $\Phi(t)$ вдоль γ, то $\int\limits_{\gamma} f\,dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$.*

Интеграл от f по произвольной непрерывной кривой $\gamma \in D$ можно определить как *приращение ее первообразной вдоль кривой* на отрезке $[\alpha, \beta]$ изменения параметра. Из предыдущей теоремы видно, что в многосвязной области не каждая аналитическая функция имеет первообразную.

Пример 6.3. Пусть $D = \{0 < z < 2\}$ и $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Функция f аналитична в D, но не может иметь первообразной. В самом деле, если бы существовала первообразная F, то для любой кривой $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow D$, лежащей в D, первообразной вдоль кривой служила бы функция $F \circ \gamma(t)$ и $\int\limits_{\gamma} f\,dz = F(b) - F(a)$, где $a = \gamma(\alpha)$ и $b = \gamma(\beta)$. В частности, интеграл вдоль любого замкнутого контура (при $b = a$) равнялся бы нулю. Но интеграл от f вдоль единичной окружности $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, равен $2\pi i$ (пример 6.1).

Если интеграл $\int\limits_\gamma f\,dz$ не зависит от пути интегрирования, то $\int\limits_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$, где z_0 и z соответственно начальная и конечная точки кривой. Если точка z_0 фиксирована, то интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = F(z)$ является функцией только z.

Теорема 6.3. *Пусть функция f непрерывна в конечной области D, и пусть интеграл от этой функции по любой замкнутой кривой, лежащей в области D, равен нулю. Тогда функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$, где $z_0 \in D$, $z \in D$, является первообразной функции f в области D.*

Теорема 6.4. *Если функция f аналитична в конечной односвязной области D, то она имеет в этой области первообразную F.*

6.2 Теория Коши

Теорема 6.5 (Теорема Коши)**.** *Если функция f аналитична в односвязной области D и γ — любая замкнутая кусочно глад-*

кая кривая Жордана, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Из теоремы Коши сразу следует теорема 6.4. Еще одна формулировка теоремы Коши в терминах гомотопии.

Теорема 6.6. *Если функция f аналитична в конечной области D, а кривые γ_1 и γ_2 гомотопны в области D, то*

$$\int\limits_{\gamma_1} f\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f\,dz.$$

В этой формулировке область D может и не быть односвязной. В примере 6.3 интеграл по любому замкнутому контуру, охватывающему точку 0, будет равен $2\pi i$.

Теорему Коши можно обобщить на случай, когда кривая γ является границей области D.

Теорема 6.7 (Обобщенная теорема Коши)**.** *Если γ — замкнутая гладкая кривая Жордана, а функция f аналитична в конечной области D, ограниченной контуром γ, и непрерывна в $\overline{D}$, то*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Из теоремы Коши вытекает и следующее утверждение.

Теорема 6.8. *Пусть D — конечная $(n+1)$-связная область, граница которой Γ представляет собой совокупность попарно непересекающихся замкнутых кусочно гладких кривых Жордана $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$, где $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_n$ лежат внутри конечной области, ограниченной кривой Γ_0. Если f — аналитичная в D и непрерывная в $\overline{D}$ функция, то*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_0} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n-}\int\limits_{\Gamma_k} f(z)\,dz = 0.$$

Если Если f — аналитическая в области D с жордановой кусочно гладкой границей Γ и непрерывная в $\overline{D}$ функция, то для нее справедлива *интегральная формула Коши*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi. \tag{6.3}$$

Величина в правой части этой формулы называется *интегралом Коши.*

Если γ — замкнутая или разомкнутая кусочно гладкая кривая Жордана и $f(\xi)$ — заданная на γ непрерывная функция, то в любой точке $z \notin \gamma$ комплексной плоскости существует интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi, \tag{6.4}$$

являющийся однозначной функцией z. Выражение (6.4) называется *интегралом типа Коши.* Интеграл типа Коши обладает замечательным свойством: *в любой точке z комплексной плоскости, не лежащей на кривой γ, интеграл типа Коши* (6.4) *является аналитической функцией, причем*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi. \tag{6.5}$$

Более того, $F(z)$ имеет производные всех порядков и

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi. \tag{6.6}$$

Это свойство интеграла типа Коши позволяет делать важное заключение: *аналитическая в области D функция f в каждой точке этой области имеет производную любого порядка.*

Задачи

6.1. Вычислить интеграл $\int\limits_l |z|\ \overline{z}\,dz$, где l — верхняя полуокружность $|z|=1$ с обходом против часовой стрелки.

6.2. Вычислить интеграл $\int\limits_l (z+\overline{z})\,dz$, где l — дуга окружности $|z|=1$, ${}^{\pi}\!/_{2} \le \arg z \le {}^{3\pi}\!/_{2}$.

Вычислить интегралы по заданным контурам:

6.3. $\int\limits_l (2z+1)\,\overline{z}\,dz$, $l=\{\ z|\ |\ z\ |=1,\ \ 0\le \arg z \le \pi\}$.

6.4. $\int\limits_l \operatorname{Im} z\,dz$, $l=\{\ (x,y)\ |\ y=2x^2,\ \ 0\le x\le 1\}$.

6.5. $\int\limits_l (iz^2-2\overline{z})\,dz$, $l=\{\ z\ |\ |\ z\ |=2,\ \ 0\le \arg \le {}^{\pi}\!/_{2}\}$.

6.6. $\int\limits_l \operatorname{Re}(z+z^2)\,dz$, $l=\{\ (x,y)\ |\ y=2x^2,\ \ 0\le x\le 1\}$.

6.7. $\int\limits_l (\ \overline{z}^2-z)\,dz$, $l=\{\ z\ |\ |\ z\ |=1,\ \ 0\le \arg \le 2\pi\}$.

6.8. $\int\limits_l \overline{z}e^z dz$, l — отрезок прямой от точки $z_0=1$ до точки $z_1=i$.

6.9. $\int\limits_l e^{\overline{z}} dz$, l — отрезок прямой от точки $z_0=\pi$ до точки $z_1=-i\pi$.

6.10. Вычислить интеграл $\int\limits_l (z-z_0)^n\,dz$, n – целое число, где l — окружность $|z-z_0|=R$ с обходом против часовой стрелки.

6.11. Вычислить интеграл $\int\limits_l (z-z_0)^n\,dz$, n — целое число, где l — верхняя полуокружность $|z-z_0|=R$, $\operatorname{Im}(z-z_0)>0$ с обходом против часовой стрелки.

6.12. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_l \frac{z}{\overline{z}}\,dz$, где l — четверть окружности $|z-z_0|=1$, $0\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2}$ с обходом против часовой стрелки.

6.13. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_l e^{\overline{z}}dz$ вдоль ломаной с вершинами:
1) $0,\ 1,\ 1+i$; 2) $0,\ i,\ 1+i$.

6.14. Каков геометрический смысл интеграла $\int\limits_l |dz|$?

Вычислить интегралы (обход контуров — против часовой стрелки):

6.15. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin\frac{i\pi z}{2}}{z^2+1}dz$

6.16. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^3(z-1)}dz$

6.17. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$

6.18. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$

6.19. $\oint\limits_{|z+i|=} \dfrac{\sin z}{(z+i)^3} dz$ **6.20.** $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{dz}{z^2+2z}$

6.21. $\oint\limits_{C} \dfrac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$, где:

1) $C = \{z|\, |z-1| = 1\}$; 2) $C = \{z|\ |z+1| = 1\}$;

3) $C = \{z|\ |z| = R,\ R \neq 1\}$.

6.22. $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz.$

6.23. Вычислить интеграл $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l} \dfrac{e^{\pi i}}{z(1-z)}\, dz$, если:

1) точка 0 лежит внутри, а точка 1 — вне контура l;

2) точка 1 лежит внутри, а точка 0 — вне контура l;

3) точки 0 и 1 лежат внутри контура l.

6.24. Вычислить интеграл $\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{l} z^2 \operatorname{Ln} \dfrac{z+1}{z-1}\, dz$, если $\operatorname{Ln} a = \ln a$ для $a > 1$ и контур l представляет собой:

1) окружность $|z| = 2$;

2) окружность $|z-1| = 1$; а начальная точка интегрирования $z_0 = 1 + i$.

6.25. Доказать теорему Морера (обращение теоремы Коши): Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области области

D и вдоль любого замкнутого кусочно гладкого контура γ, лежащего в D, $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$, то $f(z)$ аналитична всюду в D.

6.26. Показать, что каждая ветвь функции $\operatorname{Ln} z$ может быть получена при помощи интегрирования функции $1/z$ вдоль подходящим образом подобранного контура, соединяющего точку $z_0 = 1$ с точкой z.

6.27. Доказать, что интеграл типа Коши (6.4), где γ — гладкая кривая, а f — непрерывная на γ функция, является функцией, аналитичной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ (расширенной комплексной плоскости за исключением точек кривой γ) и равной нулю в бесконечности.

6.28. Пусть γ — гладкая замкнутая жорданова кривая, ограничивающая область D, и f — дифференцируемая на γ функция. Доказать, что каждое из следующих условий необходимо и достаточно, чтобы интеграл типа Коши (6.4) был интегралом Коши (6.3):

1) $\int\limits_{\gamma} \dfrac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = 0$ для всех $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$;

2) $\int\limits_{\gamma} \xi^n f(\xi)\,d\xi = 0$ для всех $n = 0, 1, 2\ldots$

Ответы

6.1 *Решение.* Покажем как решается задача, если использовать формулу, позволяющую представить интеграл от функции комплексного переменного в виде суммы двух криволинейных интегралов 2-го рода: $\int\limits_l f(z)dz =$ $= \int\limits_l u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_l v(x,y)dx + u(x,y)dy.$ Имеем

$$\int\limits_l |z|\ \overline{z}\,dz = \int\limits_l \sqrt{x^2+y^2}\,(x\,dx + y\,dy) + i\int\limits_l \sqrt{x^2+y^2}\,(-y\,dx + x\,dy).$$

Переходя к параметрическому уравнению кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$, и учитывая, что $\sqrt{x^2+y^2} = |z| = 1$ в точках кривой, получаем $\int\limits_l |z|\ \overline{z}\,dz = \int\limits_0^\pi (-\cos t\sin t + \sin t\cos t)dt + i\int\limits_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \pi i.$ Указанный выше метод вычисления интегралов не всегда является оптимальным. Существуют и другие способы решения.

6.2 *Решение.* Положим $z(t) = e^{it}$, $\pi/2 \le t \le 3\pi/2$. Тогда $z' = ie^{it}$ и, используя формулу $\int\limits_l f(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt$, находим:

$$\int\limits_l (z+\overline{z})dz = \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(e^{it} + e^{-it}\right) ie^{it}dt = i\left(\frac{1}{2i}\,e^{2it} + t\right)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = \pi i.$$

6.3 $-4 + i\pi$. **6.4** $\dfrac{2}{3} + 2i$. **6.5** $\dfrac{8}{3} - i(\dfrac{8}{3} + 4\pi)$. **6.6** $\dfrac{1}{30} - \dfrac{i}{3}$.
6.7 -2. **6.8** $(2\sin 1 - e) + i(1 - 2\cos 1)$. **6.9** $-i(1+e^\pi)$.
6.10 $\oint\limits_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0, & n \ne -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$ *Указание.* Произвести замену переменной $z - z_0 = R\cdot e^{i\theta}$.

6.11 $\displaystyle\int\limits_{\substack{|z-z_0|=R\\ 0\le\arg(z-z_0)\le\pi}} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} \pi i, & n=-1,\\ 0, & n=2k+1, k\in z, k\neq -1,\\ -\frac{2R^{2k+1}}{2k+1}, & n=2k. \end{cases}$

6.12 $-\dfrac{1+i}{3}$. **6.13** 1) $e\cdot(2-e^{-1})-1$; 2) $e^{-1}\cdot(e-2)+1$.

6.14 Длина кривой l.

6.15 *Решение.* Запишем интеграл в виде $I=\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{\sin\frac{i\pi z}{2}}{(z+i)(z-i)}\,dz$ и, используя интегральную формулу Коши (6.3), находим $I=2\pi i\left.\dfrac{\sin\frac{i\pi z}{2}}{z+i}\right|_{z=i}=2\pi i\,\dfrac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{2i}=-\pi$.

6.16 *Решение.* Так как внутри контура интегрирования знаменатель подинтегральной функции обращается в нуль в точках $z_1=0$ и $z_2=1$, то рассмотрим многосвязную область D, ограниченную окружностью $\Gamma=\{z\,|\,|z-2|=3\}$ и внутренними контурами $\gamma_1=\{z\,|\,|z|=\rho\}$ и $\gamma_2=\{z\,|\,|z-1|=\rho\}$, $(0<\rho<1/2)$. Тогда в этой области D функция $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$ является аналитической, и, согласно теореме 6.8, можем записать: $\displaystyle\oint\limits_{\Gamma^+}f(z)dz+\oint\limits_{\gamma_1^-}f(z)dz+\oint\limits_{\gamma_2^-}f(z)dz=0$, откуда следует, что $I=\displaystyle\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{e^z}{z^3(z-1)}dz=\oint\limits_{\gamma_1^+}\frac{e^z}{z^3(z-1)}dz+\oint\limits_{\gamma_2^+}\frac{e^z}{z^3(z-1)}dz$. Применяя теперь интегральную формулу Коши (6.3) и следствие теоремы об интеграле типа Коши (6.6),

получаем $\displaystyle\oint\limits_{\gamma_1^+}\frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\left.\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\right|_{z=0}=\pi i\left.\frac{e^z(z^2-4z+5)}{(z-1)^3}\right|_{z=0}=-5\pi i$,

$\displaystyle\oint\limits_{\gamma_2^+}\frac{e^z/z^3}{z-1}dz=2\pi i\left.\frac{e^z}{z^3}\right|_{z=1}=2\pi\,e\,i$. Таким образом, $I=\pi\,i\,(2e-5)$.

6.17 0. **6.18** $-8\pi i$. **6.19** $-\pi\ \operatorname{sh} 1$. **6.20** 0.

6.21 1) $\dfrac{3\pi\, i}{8}$; 2) $-\dfrac{3\,\pi\, i}{8}$; 3) 0. **6.22** 0.

6.23 1) 1; 2) $-e$; 3) $1-e$. **6.24** 1) $2/3$; 2) $1-2i/3$.

7 Ряды Тейлора и Лорана

7.1 Аналитические функции и степенные ряды

В этом пункте мы получим представление аналитических функций в виде сумм степенных рядов (рядов Тейлора). В основе этого представления лежит интегральная формула Коши.

Ряд (из комплексных чисел) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ имеет конечный предел s; этот предел называется *суммой* ряда.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, где функции f_n определены на некотором множестве $M \subset \overline{\mathbb{C}}$, называется *равномерно сходящимся* на M, если он сходится в каждой точке $z \in M$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ остатки этого ряда $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| < \varepsilon$ для всех $z \in M$.

Так же, как в анализе, доказывается, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на множестве M, если он мажорируется на M сходящимся числовым рядом ($\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$, где $\|f_n\| = \sup\limits_{z\in M} |f_n(z)|$). Сумма равномерно сходящегося ряда из функций, непрерывных на множестве M, непрерывна на этом множестве, равномерно сходящийся на гладкой кривой ряд из непрерывных функций можно почленно интегрировать по этой кривой.

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n. \tag{7.1}$$

Пример 7.1. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^n}$ сходится во всей комплексной плоскости, так как для любого z можно указать такое N, что для любого $n > N$ имеет место неравенство $|z/n| < 1/2$, т. е. $|z^n/n^n| < 1/2^n$, откуда вытекает сходимость в точке z.

Пример 7.2. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ сходится лишь при $z = 0$, так как если $z \neq 0$, то при $n > 1$ имеем $|nz| > 1$ и $|nz|^n > 1$ (не выполнено необходимое условие сходимости).

Теорема 7.1 (Теорема Абеля)**.** *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{7.2}$$

сходится в точке $z_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится в круге $K_0 : |z| < |z_0|$, а в круге $K_1 : |z| \leq \rho < |z_0|$ этот ряд сходится равномерно.

Из теоремы Абеля вытекает ряд важных следствий. При выполнении условий теоремы *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$*, составленный из* *производных ряда* (7.2) *сходится абсолютно в круге* K_0 *и равномерно в круге* K_1.

Существует круг $K : |z| < R$ *такой, что ряд* (7.2) *сходится во всех точках, лежащих внутри круга* K *и расходится вне этого круга.* Этот круг называют *кругом сходимости* ряда (7.2), а его радиус R — *радиусом сходимости.*

Сумма степенного ряда (7.2) *является непрерывной и дифференцируемой функцией внутри круга сходимости этого ряда.*

Из коэффициентов степенного ряда (7.2) составим последовательность неотрицательных чисел $|c_1|$, $|c_2|^{1/2} \dots |c_k|^{1/k}, \dots$ и обозначим через l верхний предел этой последовательности, $l = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|c_k|^{1/k}$.

Теорема 7.2 (Теорема Коши-Адамара)**.** *Радиус сходимости* R *степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *определяется формулой*

$$R = \frac{1}{l},$$

причем подразумевается, что $R = 0$ *при* $l = +\infty$ *и* $R = +\infty$ *при* $l = 0$.

Суммируя и обобщая вышесказанное, сформулируем вывод: *сумма* $s(z)$ *степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *внутри его круга* *сходимости* $|z-a|<R$ *является аналитической функцией.* Обратное утверждение известно под названием теоремы Тейлора. Но прежде чем ее сформулировать, сделаем

Замечание. Сходимость степенного ряда в точках границы круга сходимости не связана с аналитичностью суммы ряда в этих точках.

Пример 7.3. напишем разложение в геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{7.3}$$

сходящееся в круге $\{|z|<1\}$. Во всех точках окружности $\{|z|=1\}$ ряд (7.3) расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Однако сумма этого ряда аналитична во всех точках окружности, кроме $z=1$.

Пример 7.4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}=f(z) \tag{7.4}$$

сходится во всех точках окружности круга сходимости $\{|z|=1\}$, так как мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum \dfrac{1}{n^2}$. Однако его сумма f не может быть аналитичной в точке $z=1$, так как производная $f'(z)=\sum_1^{\infty} \dfrac{z^{n-1}}{n}$ при стремлении к 1 по действительной оси неограниченно возрастает.

Теорема 7.3 (Теорема Тейлора). *Аналитическая в области D функция f в окрестности каждой точки $a \in D$ представляется в виде степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{7.5}$$

радиус сходимости R которого не меньше, чем расстояние d от точки a до границы Γ области D.

Если γ — окружность $|\xi - a| = \delta < d$, то, используя интегральную теорему Коши, равенство (7.5) можно записать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{z-a}{\xi - a}\Big)^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{7.6}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1 \ldots, \tag{7.7}$$

или

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{7.8}$$

Ряд (7.6), коэффициенты которого выражаются через аналитическую функцию $f(z)$ по формулам (7.7) и (7.8), называется *рядом Тейлора* или *разложением Тейлора* функции $f(z)$.

Каждый степенной ряд внутри своего круга сходимости является рядом Тейлора для своей суммы $s(z)$.

Разложение аналитической функции в ряд Тейлора возможно единственным способом.

Точка a из области задания функции f, в которой $f(a) = 0$ называется нулем функции f. Аналитическая функция f (не равная тождественно нулю) в области своего задания может иметь лишь счетное множество нулей. В области аналитичности в окрестности своего нуля $a \neq \infty$ функция разлагается в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_m \neq 0, \tag{7.9}$$

где $m \geq 1$. Число m называется *порядком* или *кратностью* нуля. Если $m = 1$, то нуль a называется *простым.*

Если бесконечно удаленная точка является точкой аналитичности, то разложение функции f в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}. \tag{7.10}$$

Если $a = \infty$ является нулем функции f, то

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = \frac{1}{z^m}\Big(c_m + \frac{c_{m+1}}{z} + \cdots\Big), \tag{7.11}$$

где $c_m \neq 0$.

7.2 Приемы разложения в степенной ряд

Непосредственным вычислением производных от ряда элементарных функций в точке $z = 0$ можно получить следующие сходящиеся во всей комплексной плоскости разложения:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{7.12}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \tag{7.13}$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{7.14}$$

Следующие разложения сходятся в круге $|z| < 1$:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \tag{7.15}$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \ \alpha \neq 1, \tag{7.16}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \tag{7.17}$$

Для нахождения коэффициентов ряда (7.6) формулы (7.7) и (7.8) обычно не используются. Довольно часто коэффициенты ряда Тейлора находят, используя известные разложения и применяя различные искусственные приемы.

Пример 7.5. Разложение

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, \quad (|z|<1)$$

получается дифференцированием ряда (7.17).

Пример 7.6. Для нахождения ряда Тейлора в окрестности точки $z=0$ рациональной функции $f(z) = \dfrac{1}{(1-z^2)(z^2+4)}$ представим ее в виде

$$f(z) = \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{z^2+4}\Big) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{4(1+\frac{z^2}{4})}\right),$$

откуда в силу (7.17) получим разложение
$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(1+\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\Big)z^{2n}$, сходящееся в круге $|z|<1$.

Пример 7.7. Для разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ функции $e^z \cos z$ удобно использовать тождество

$$e^z \cos z = e^z\Big(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\Big) = \frac{1}{2}\big(e^{z(1+i)} + e^{z(1-i)}\big).$$

Так как $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm\pi/4}$, в силу (7.12) получаем разложение

$$e^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{\pi n}{4}} + 2^{\frac{n}{2}}e^{-i\frac{\pi n}{4}}}{2}\,z^n = \sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}z^n,$$

сходящееся во всей комплексной плоскости.

Пример 7.8. Для разложения в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$ функции $z \operatorname{ctg} z$ применим метод неопределенных коэффициентов. Запишем

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i + \frac{2i}{e^{2iz}-1}. \qquad (7.18)$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ как отношение двух аналитических функций: $g(z) = z$ и $h(z) = e^z - 1$. Тогда функция $g(z) = z$ (ряд по степеням z, в котором все коэффициенты кроме первого равны нулю) получается перемножением двух рядов: $h(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ (см. (7.12)) и $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{c}_n z^n$, последний удобно записать в виде $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений на неизвестные коэффициенты разложения функции $f(z)$, а именно $c_0 = 1$, $C_{n+1}^0 c_0 + C_{n+1}^1 c_1 + \dots + C_{n+1} n = 0$ $(n \geq 1)$, где C_{n+1}^k $(k = 0,\ 1 \dots n)$ — биномиальные коэффициенты, т. е. $c_n = B_n$ — числа Бернулли. Таким образом, получаем

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n. \qquad (7.19)$$

Ряд (7.19) сходится в круге $|z| < 2\pi$. Используя (7.19) и (7.18), получаем разложение

$$z \operatorname{ctg} z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n} \quad (|z| < \pi).$$

7.3 Ряды Лорана

Рассмотрим функциональный ряд с постоянными коэффициентами

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \mathfrak{c}_n (z-a)^n, \quad a \neq \infty, \tag{7.20}$$

каждый член которого имеет смысл для всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z-a| > 0$. В результате замены $z - a = 1/\zeta$ ($\zeta = 0$ при $z = \infty$) ряд (7.20) запишется в виде обычного степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$ с кругом сходимости $|\zeta| < r_1$ на плоскости переменного ζ. Тогда ряд (7.20) сходится абсолютно вне замкнутого круга $|z-a| \leq r = 1/r_1$ и равномерно вне круга $|z-a| < \rho$ для любого $\rho < r$. Ряд (7.20) называется *степенным рядом по отрицательным степеням* $z-a$. Его сумма $s_2(z)$ является аналитической функцией во всех точках комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|z-a| > r$.

Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ (обозначим его сумму через $s_1(z)$) сходится в круге $|z-a| < R$, а ряд (7.20) вне круга $|z-a| \leq r$, то при $r < R$ функция $s(z) = s_1(z) + s_2(z)$ аналитична в кольце $K : r < |z-a| < R$ и представляет в нем сумму ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = s(z).$$

Обратное утверждение носит название теоремы Лорана.

Теорема 7.4 (Теорема Лорана)**.** *Аналитическая в кольце K функция f в каждой точке $z \in K$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{7.21}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1 \ldots,$$

а γ — окружность $|\xi - a| = \delta$, $r < \delta < R$.

Ряд (7.21) называется *рядом Лорана* или *лорановским разложением* аналитической в кольце K функции f, а ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$ — соответственно *правильной* (*регулярной*) или *главной* (*иррегулярной*) частями лорановского разложения.

Если $a = \infty$, то отрицательные степени являются «правильными», $s_2(z)$ является аналитической функцией в бесконечно удаленной точке. Поэтому естественно назвать главной частью лорановского разложения в окрестности бесконечной точки совокупность членов этого разложения с положительными степенями.

В данном круговом кольце $K : r < |z - a| < R$ (может оказаться, что $r = 0$ или $R = \infty$) *аналитическая функция f единственным образом разлагается в ряд Лорана.* На этом основании для получения коэффициентов ряда Лорана не обязательно использовать теоремы 7.4. На практике обычно разложение в ряд Лорана сводится к разложению в ряд Тейлора.

Пример 7.9. Для нахождения ряда Лорана для функции $f(z) = \cos\dfrac{z}{z+1}$ в окрестности точки $z = -1$ выполним следующие преобразования:

$$f(z) = \cos\big(1 - \frac{1}{z+1}\big) = \cos 1 \cos\frac{1}{z+1} + \sin 1 \sin\frac{1}{z+1}.$$

Используя (7.13), получаем ряд следующий ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности -1:

$$\cos\frac{z}{z+1} = \cos 1 + \frac{\sin 1}{z+1} - \frac{\cos 1}{2!(z+1)^2} - \frac{\sin 1}{3!(z+1)^3} + \cdots +$$
$$+ (-1)^n \frac{\cos 1}{(2n)!(z+1)^{2n}} + (-1)^n \frac{\sin 1}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}} + \cdots,$$

сходящийся в кольце $0 < |z+1| < \infty$.

Задачи

7.1. Разложить функции в ряд Тейлора в окрестности точки a и определить область сходимости этого ряда:

1) $z^3, \quad a = 2;$ 2) $e^z, \quad a = 3;$

3) $z\cos z, \quad a = \pi;$ 4) $z\sin z, \quad a = \pi;$

5) $\dfrac{1}{1-z^2}, \quad a = 0;$ 6) $\dfrac{1}{z^2+b^2}, \quad a = 0.$

7.2. Разложить в ряд Тейлора в окрестности нуля и определить область сходимости:

1) $\displaystyle\int\limits_0^z \frac{\sin z}{z} dz;$ 2) $\displaystyle\int\limits_0^z e^{z^2} dz.$

Разложить функции в ряд Тейлора в окрестности точки a и определить область сходимости этого ряда:

7.3. $\dfrac{1}{(z-b)(z-c)}, \quad a = 0, \quad a = \infty, \quad (|b| < |c|).$

7.4. $\dfrac{1}{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}, \quad a = 0, \quad a = \infty, \quad (|b| < |c|).$

7.5. $f(z) = (1+z)^\alpha, \quad a = 0, \quad f(0) = b_\alpha$ — одно из значений 1^α, α — дробное число.

7.6. $f(z) = \sqrt{z+3}, \quad a = 1; \quad f(1) = -2.$

7.7. $f(z) = \mathrm{Ln}\,\dfrac{1+z}{1-z}, \ \ a = 0; \ \ f(0) = 2\,\pi\,n\,i.$

7.8. $f(z) = z\,\mathrm{L}n\ z$, $a = 1$; $f(z) = 2\,\pi\,i$.

7.9. Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ следующих однозначных ветвей:

1) $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}$, 2) $\ln(1+z) = \int\limits_0^z \frac{d\xi}{1+\xi}$,

где пути интегрирования лежат в круге $|z| < 1$.

7.10. Доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$, $f(0) = 0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(z^k)$ сходится при $|z| < 1$ и представляет собой аналитическую функцию.

7.11. Доказать, что требование абсолютной сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ в одной граничной точке его круга сходимости $|z| < R$ влечет за собой абсолютную и равномерную сходимость этого ряда в замкнутом круге $|z| \le R$.

Представить рядом Лорана по степеням $(z-a)$ и определить область сходимости.

7.12. $\dfrac{z}{(z-a)^n}$, a.

7.13. $\dfrac{(z-1)^2}{z}$, $a = 0$.

7.14. $\dfrac{z}{z^2-(b+c)z+bc}$, $a = 0$.

7.15. $\dfrac{z}{z^3-2z^2+z-2}$, $a = 0$.

7.16. $z^3 \cos\dfrac{1}{z}$, $\quad a = 0$.

7.17. $z^5\, e^{1/z}$, $\quad a = 0$.

7.18. $\dfrac{9}{(z^2+1)(z^2-2)^2}$, $\; a = 0$ (найти разложение в трех областях, покрывающих плоскость).

7.19. $\dfrac{3z}{(z^2-1)(z^2+2)}$, $\; a = 0$ (найти разложение в трех областях, покрывающих плоскость).

7.20. $\dfrac{\cos z}{z^3}$, $\quad a = 0;\; a = \infty$.

7.21. $\sin\dfrac{1}{z-2}$, $\quad a = 2$.

7.22. $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $\quad a = 2$.

7.23. $z^2 e^{1/z}$, $\quad a = 0;\; a = \infty$.

Ответы

7.1 1) $8+12(z-2)+6(z-2)^2+(z-2)^3$.

2) $e^3\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(z-3)^k}{k!}, \quad |z-3|<\infty$.

3) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}(z-\pi)^n,\ |z-\pi|<\infty;\ a_{2k}=(-1)^k\pi,\ a_{2k+1}=(-1)^k(2k+1)$.

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{b_n}{n!}(z-\pi)^n,\ |z-\pi|<\infty;\ b_{2k}=(-1)^k 2k,\ b_{2k+1}=(-1)^{k+1}\pi$.

5) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^{2k}, \quad |z|<1$.

6) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k z^{2k}}{b^{2k+2}}, \quad |z|<|b|$.

7.2 1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}, \quad |z|<\infty$.

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^{2k+1}}{k!(2k+1)}, \quad |z|<\infty$.

7.3 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}\cdot\dfrac{z^k}{b^{k+1}c^{k+1}}, \quad |z|<|b|; \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{b^k-c^k}{b-c}\cdot\dfrac{1}{z^{k+1}}, \quad |z|>|c|$.

7.4 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{b^{2k+2}-c^{2k+2}}{b^2-c^2}\dfrac{z^{2k}}{b^{2k+2}c^{2k+2}},\ |z|<|b|;\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{b^{2k}-c^{2k}}{b^2-c^2}\dfrac{1}{z^{2k+2}},\ |z|>|c|$.

7.5 $b_\alpha\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_\alpha^k z^k, \quad |z|<1; \quad C_\alpha^k=\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$.

7.6 $-2\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{1/2}^k\dfrac{(z-1)^k}{4^k}, \quad |z-1|<4$.

7.7 $2\pi ni+2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^{2k+1}}{2k+1}, \quad |z|<1$.

7.8 $2\pi i+(2\pi i+1)(z-1)+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(k-1)k}(z-1)^k \quad |z-1|<1$.

7.9 1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{z^{2k+1}}{2k+1}; \quad$ 2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{z^{k+1}}{k+1}$.

7.12 $\dfrac{a}{(z-a)^n}+\dfrac{1}{(z-a)^{n-1}}, \quad |z-a|>0$.

7.13 $\dfrac{1}{z} - 2 + z, \quad 0 < |z| < \infty.$

7.14 $\dfrac{1}{b-c}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{b^k}{z^k} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^{k+1}}{c^{k+1}}\right), \quad |b| < |z| < |c|\,.$

7.15 $-\dfrac{1}{5}\left\{\sum\limits_{k=\infty}^{0}\left(\dfrac{(-1)^k 2}{z^{2k+1}} + \dfrac{(-1)^k}{z^{2k}}\right) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{z^k}{2^k}\right\}, \quad 1 < |z| < 2.$

7.16 $\sum\limits_{k=\infty}^{0}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}\dfrac{1}{z^{2k-3}}, \quad 0 < |z| < \infty.$

7.17 $\sum\limits_{k=\infty}^{0}\dfrac{1}{k!}\dfrac{1}{z^{k-5}}, \quad 0 < |z| < \infty.$

7.18 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{3k+5}{2^{k+2}} + (-1)^k\right)z^{2k}$, если $|z| < 1$,

$\sum\limits_{k=\infty}^{0}\dfrac{(-1)^k}{z^{2k+2}} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{3k+5}{2^{k+2}}z^{2k}$, если $1 < |z| < \sqrt{2}$,

$\sum\limits_{k=\infty}^{0}\left\{(3k-2)2^{k-1} + (-1)^k\right\}\dfrac{1}{z^{2k+2}}$, если $|z| > \sqrt{2}$.

7.19 $-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(1 + \dfrac{(-1)^k}{2^{k+1}}\right)z^{2k+1}$, если $|z| < 1$,

$\sum\limits_{k=\infty}^{0}\dfrac{1}{z^{2k+1}} - \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2^{k+1}}z^{2k+1}$, если $1 < |z| < \sqrt{2}$,

$\sum\limits_{k=\infty}^{0}\dfrac{1-(-2)^k}{z^{2k+1}}$, если $|z| > \sqrt{2}$.

7.20 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{z^{2k-3}}{(2k)!}, \quad 0 < |z| < \infty.$

7.21 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{(2k+1)!(z-2)^{2k+1}}, \quad 0 < |z-2| < \infty.$

7.22 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{4^{2k}}{(2k)!}\left(\dfrac{\cos 1}{(z-2)^{4k}} + \dfrac{4\sin 1}{(2k+1)}\dfrac{1}{(z-2)^{4k+2}}\right), \quad 0 < |z-2| < \infty.$

7.23 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!\,z^{n-2}}, \quad 0 < \ |z|\ < +\infty.$

8 Особые точки. Вычеты

8.1 Изолированные особые точки

Звучит парадоксально, но наиболее интересными при изучении аналитических функций оказываются точки, в которых функции перестают быть аналитическими — их *особые* точки. Простейшим типом таких точек являются изолированные особые точки. Точка a называется *изолированной особой точкой* функции f, если существует такая проколотая окрестность этой точки (т. е. множество $\{0 < |z - a| < r$, если точка a конечна, или множество $\{R < |z| < \infty\}$, если $z = \infty$), в которой функция аналитична. В самой точке a функция может быть и не задана. В зависимости от поведения f при стремлении к такой точке различают три типа таких точек.

Изолированная особая точка a функции f называется:

(1) *устранимой*, если существует конечный $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A$;

(2) *полюсом*, если существует $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;

(3) *существенно особой*, если f не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \to a$.

Характер изолированной особой точки $z = a$ тесно связан с характером лорановского разложения функции в проколотой окрестности этой точки (коротко — в окрестности точки a).

Теорема 8.1. *Изолированная особая точка a функции f является устранимой в том и только том случае, если лорановское разложение f в окрестности a не содержит главной части:* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Теорема 8.2. *Изолированная особая точка a функции f является устранимой в том и только том случае, если f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a.*

Теорема 8.3. *Изолированная особая точка a функции f является полюсом в том и только том случае, если главная часть лорановского разложения f в окрестности точки a содержит лишь конечное число отличных от нуля членов:* $f(z) = \sum\limits_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Теорема 8.4. *Точка a является полюсом функции f в том и только том случае, если функция $\varphi = \dfrac{1}{f}$ (не равная тождественно нулю) аналитична в окрестности a и $\varphi(a) = 0$.*

Порядком полюса a функции f называется порядок этой точки как нуля функции $\varphi = \dfrac{1}{f}$. Порядок полюса совпадает с номером N старшего члена гавной части лорановского разложения функции в проколотой окрестности полюса.

Теорема 8.5. *Изолированная особая точка a функции f является существенно особой в том и только том случае, если главная часть лорановского разложения в окрестности точки a содержит бесконечно много отличных от нуля членов.*

Поведение функции в окрестности существенно особой точки характеризует

Теорема 8.6 (Сохоцкий). *Если a является существенно особой точкой функции f, то для любого числа $A \in \overline{\mathbb{C}}$ можно найти последовательность точек $z_n \to a$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Приведем и обобщение теоремы Сохоцкого.

Теорема 8.7 (Пикар). *В любой окрестности существенно особой точки функция принимает, и притом бесконечное число раз, любое значение, кроме, быть может, одного.*

В качестве иллюстрации рассмотрим функцию e^z, для которой ∞ является существенно особой точкой. Уравнение $e^z = A$ при любом $A \neq 0$ имеет следующие решения:

$$z_k = \ln|A| + i\,(\arg A + 2k\pi),$$

где $\arg A$ — фиксированное значение аргумента числа A, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Это значит, что в любой окрестности бесконечной точки имеется бесчисленное множество точек z_k, в которых функция e^z принимает значение, равное A. Значение $A = 0$ функция e^z не принимает, оно является *исключительным* для e^z.

Пример 8.1. Для функции $f(z) = \dfrac{(e^z - 1)^2}{1 - \cos z}$ точка $z = 0$ является устранимой особой точкой, так как эта функция аналитична в проколотой окрестности точки $z = 0$ и при $z \to 0$ имеем

$$e^z - 1 \sim z, \quad (e^z - 1)^2 \sim z^2, \quad 1 - \cos z \sim \frac{z^2}{2},$$

откуда следует, что $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 2$ $(f(0) = 2)$.

Пример 8.2. Для функции $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$ точки $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ являются полюсами первого порядка, так как функция $g(z) = 1/f(z) = \sin(1/z)$ аналитична при $z \neq 0$, а точки z_k являются ее нулями первого порядка $(g'(z_k) \neq 0)$. Следовательно, точка $z = 0$ является неизолированной особой точкой (предельной точкой полюсов). Точка $z = \infty$ — полюс первого порядка для $f(z)$, так как $f(z) \sim z$ $(z \to \infty)$.

Пример 8.3. Для функции $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{(e^z - 1)^3}$ точка $z = 0$ — полюс первого порядка, так как функции $\varphi(z) = 1 - \cos z$ и $\psi(z) = (e^z - 1)^3$ аналитичны в окрестности $z = 0$ и при $z \to 0$ имеем $1 - \cos z \sim z^2/2$, $(e^z - 1)^3 \sim z^3$, т. е. $f(z) \sim 1/2z$. Точки $z_k = 2k\pi i$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — полюсы третьего порядка для

$f(z)$, так как эти точки являются нулями третьего порядка для функции $\psi(z)$, а $\varphi(z_k) \neq 0$. Точка $z = \infty$ является неизолированной особой точкой (предельной точкой полюсов) для $f(z)$.

Пример 8.4. Для функции $f(z) = e^{1/\sin z}$ точки $z_k = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ являются существенно особыми. в самом деле, $\sin z \sim (-1)^k (z - k\pi)$, $z \to k\pi$. Пусть k — четное. Тогда если $z \to k\pi + 0$, то $\sin z \to +0$ и $f(z) \to +\infty$, а если $z \to k\pi - 0$, то $\sin z \to -0$ и $f(z) \to 0$, т.е. функция $f(z)$ не имеет предела в точке z_k. Аналогично рассматривается случай нечетного k. Других особых точек в конечной плоскости у функции $f(z)$ нет. Точка $z = \infty$ является для $f(z)$ предельной точкой существенно особых точек.

Пример 8.5. Рассмотрим и более сложный пример особых точек, а именно рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots \tag{8.1}$$

По формуле Коши-Адамара ряд (8.1) сходится в круге $|z| < 1$ и, следовательно, $f(z)$ аналитична в этом круге. При $z \to 1$ по направлению действительной оси она стремится к бесконечности. Действительно, при $z = x$, $0 < x < 1$, имеем $f(x) > \sum\limits_{n=0}^{N} x^{2^n}$, где N — произвольное натуральное число; предел при $x \to 1$ суммы в правой части равен $N + 1$, следовательно, найдется

$\delta > 0$ такое, что $f(x) > N$ при $1 - \delta < x < 1$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \infty$. Таким образом, точка $z = 1$ для функции $f(z)$ является особой. Но

$$f(z^2) = 1 + z^4 + z^8 + \cdots = f(z) - z^2,$$

следовательно, $f(z) = z^2 + f(z^2)$ стремится к бесконечности и когда $z \to -1$ по радиусу круга. Аналогично, $f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4)$, следовательно, $f(z) \to \infty$ и когда $z \to \pm i$ по радиусам круга. Вообще,

$$f(z) = x^2 + z^4 + \cdots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$$

для любого натурального n, поэтому $f(z) \to \infty$, когда z стремится по радиусу к любой «двоичной» точке $z_k = e^{k\frac{2\pi i}{2^n}}$ $(k = 0, 1, \ldots 2^n - 1)$ окружности. Эти точки не являются изолированными, поскольку невозможно найти окрестность, не содержащую другой особой точки. Говорят, что множество двоичных точек *всюду плотно* на единичной окружности. Таким образом, функция (8.1) имеет целую линию, составленную из неизолированных особых точек (особую линию).

8.2 Понятие вычета

Основная информация об аналитических функциях содержится в особых точках и главных частях лорановского разложения. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим задачу о вычислениии интегралов от аналитических функций. Пусть f аналитична в области D всюду, за исключением множества изолированных особых точек (не более чем счетного, иначе особые точки не будут изолированы). Пусть $G \subset D$ и ее граница Γ состоит из конечного числа непрерывных кривых и не содержит особых точек. Особые точки, попавшие в G, обозначим через $a_1, a_2, \dots a_n$, их конечное число. Окружим каждую особую точку окружностью γ_k столь малого радиуса, чтобы круги $\overline{U_k}$, ими ограниченные, не пересекались. Область $G \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{U_k}$ обозначим через G_r с границей Γ_r. Функция f аналитична в G_r, следовательно, по теореме Коши 6.8 $\int\limits_{\Gamma_r} f\,dz = 0$. Ориентированная граница Γ_r состоит из Γ и ориентированных отрицательно окружностей γ_k^-, таким образом по свойствам интегралов получаем

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f\,dz. \tag{8.2}$$

Вычисление интеграла от аналитической функции по границе свелось к вычислению ее интегралов по сколь угодно маленьким окружностям с центрами в особых точках.

Интеграл от функции f по достаточно малой окружности $\gamma_r = \{|z-a| = r\}$ с центром в изолированной конечной особой точке a этой функции, деленный на $2\pi i$, называется вычетом f в этой точке и обозначается символом

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} f\, dz. \tag{8.3}$$

По теореме Коши вычет не зависит от контура интегрирования(при гомотопной деформации) и характеризуется только локальным поведением функции f в ее особой точке. Также встречаются обозначения Выч $\big[f(z), a\big]$ или $\operatorname{res} f(a)$. Соотношение (8.2) выражает основную теорему Коши о вычетах.

Теорема 8.8 (Коши)**.** *Пусть функция f аналитична в области D всюду, за исключением изолированного множества особых точек, и область $G \subset D$, а ее граница Γ не содержит особых точек; тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} f\, dz = 2\pi i \sum_{(G)} \operatorname*{res}_{a_k} f \tag{8.4}$$

где сумма распространяется на все особые точки a_k функции f, принадлежащие G.

Теорема 8.9. *Вычет функции f в конечной изолированной особой точке a равен коэффициенту при минус первой степени $z - a$ в ее лорановском разложении в окрестности точки a:* $\operatorname*{res}_a f = c_{-1}$.

В устранимой особой точке вычет равен нулю. Формулы для вычисления вычета в полюсе следующие.

Если a — полюс первого порядка, то

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} (z - a)\, f(z).$$

Если в окрестности a $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(a) \neq 0$ и $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$ (отсюда следует, что a — полюс первого порядка), то удобно использовать формулу

$$c_{-1} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Если a — полюс порядка n, то

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{\,n-1}\big[f(z)(z-a)^n\big]}{dz^{\,n-1}}.$$

Пусть функция $f(z)$ имеет ∞ своей изолированной особой точкой. Ее *вычетом в бесконечности* называется величина

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma^-} f\, dz,$$

где γ^- — окружность $\{|z| = R\}$ достаточно большого радиуса, проходимая в отрицательном направлении *по часовой стрелке*, так что окрестность точки $z = \infty$ остается слева (так же, как и в случае конечной точки). Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечной точки имеет вид $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$, и

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = -c_{-1}.$$

В отличии от конечных точек, вычет в бесконечности может не равным нулю и в том случае, когда $z = \infty$ является правильной точкой этой функции.

Теорема 8.10. *Если функция f аналитична на расширенной комплексной плоскости всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек, тогда сумма ее вычетов во всех конечных особых точках и в бесконечности равна нулю,*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f + \operatorname*{res}_{\infty} f = 0.$$

Задачи

8.1. Доказать, что точка $z = a$ является устранимой особой точкой для следующих функций:

1) $\dfrac{z^2-1}{z-1}\quad (a=1)$;
2) $\dfrac{\sin z}{z}\quad (a=0)$;
3) $\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}\quad (a=0)$;
4) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}\quad (a=0)$;
5) $\operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}\quad (a=0)$;
6) $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{\sin z}\quad (a=0)$;
7) $\dfrac{1}{\cos^2 z} - \dfrac{1}{(z-\frac{\pi}{2})^2}\quad (a=\dfrac{\pi}{2})$;
8) $\dfrac{z^2-1}{z^3+1}\quad (a=\infty)$.

8.2. Доказать, что точка $z = a$ является полюсом для следующих функций:

1) $\dfrac{1}{z}\quad (a=0)$;
2) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}\quad (a=i)$;
3) $\dfrac{(z^2+1)}{z+1}\quad (a=\infty)$;
4) $\dfrac{z}{1-\cos z}\quad (a=0)$;
5) $\dfrac{z}{(e^z-1)^2}\quad (a=0)$;
6) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{z}\quad (a=\infty)$;
7) $\dfrac{z}{e^z+1}\quad (a=\pi i)$;
8) $\operatorname{tg}\pi z\quad (a=\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{3}{2},\ldots)$.

8.3. Доказать, что изолированная особая точка $z = a$ является существенно особой точкой функции $f(z)$ в том и только том случае, если существуют такие две последовательности $z_1', z_2', \ldots$ и $z_1'', z_2'', \ldots$ что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n' = \lim\limits_{n\to\infty} z_n'' = a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n') = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n'') = B$, $A \neq B$.

8.4. Доказать, что точка $z=\infty$ является существенно особой точкой функции $f(z)=\sin z$.

8.5. Доказать, что точка $z=a$ является существенно особой точкой для следующих функций:

1) $e^z \quad (a=\infty)$; 2) $e^{-z^2} \quad (a=\infty)$; 3) $\sin\dfrac{\pi}{z^2} \quad (a=0)$;

4) $z^2\cos\dfrac{\pi}{z} \quad (a=0)$; 5) $e^{tgz} \quad (a=\dfrac{\pi}{2})$; 6) $\sin(e^z) \quad (a=\infty)$;

7) $\cos\dfrac{z}{z+1} \quad (a=1)$; 8) $\sin\frac{\pi}{z^2+1} \quad (a=-i)$.

8.6. Для следующих функций найти все изолированные особые точки и определить их вид:

1) $\dfrac{z}{\sin z}$; 2) $\dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}$; 3) $z^2\sin\dfrac{z}{z+1}$;

4) $\dfrac{1}{z^2-1}\cos\dfrac{\pi z}{z+1}$; 5) $\operatorname{ctg} z-\dfrac{1}{z}$; 6) $z\,(e^{\frac{1}{z}}-1)$;

7) $e^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}}$; 8) $\sin\,(e^{\frac{1}{z}})$.

8.7. Пусть $z=a$ является существенно особой для функции $f(z)$; чем может служить a для функции $\dfrac{1}{f(z)}$?
Пусть $z=a$ является является полюсом функции $f(z)$; чем будет a для функции $e^{f(z)}$?

8.8. Пусть $f(z)$ аналитична в окрестности ∞. Показать, что

1) ∞ — полюс n-го порядка тогда и только тогда, когда существует конечный и отличный от нуля предел: $\lim\limits_{z\to\infty} z^{-n}f(z)$;

2) ∞ — нуль n-го порядка тогда и только тогда, когда существует конечный и отличный от нуля предел: $\lim\limits_{z\to\infty} z^n f(z)$.

8.9. Пусть a — существенно особая точка для $f(z)$. Чем является a для функции $F(z) = \dfrac{1}{f(z)[f(z)-1]}$?

8.10. Найти все нули и полюсы следующих функций и определить их порядок:

1) $\dfrac{(1+z^2)^2}{1-z^2}$; 2) $\operatorname{ctg} z$; 3) $z\ \operatorname{tg}^2 z$;

4) $\sin 3z - 3\sin z$; 5) $\dfrac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z+1}}$; 6) $\dfrac{\operatorname{ctg}\pi\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$;

7) $\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{sh}\sqrt{z}}$; 8) $\cos z \operatorname{ch} z$.

8.11. Найти вычеты относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удаленной точки (если она не является предельной для особых точек) для следующих функций:

1) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$; 2) $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ $(n\in\mathbb{N})$; 3) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$;

4) $e^{z+1/z}$; 5) $\operatorname{ctg}^3 z$; 6) $\dfrac{1}{z(1-e^{-hz})}$ $(h\neq 0)$;

7) $\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$; 8) $z^n\sin\dfrac{1}{z}$ $(n\in\mathbb{Z})$; 9) $\dfrac{1}{\sin z}$.

Найти вычеты каждой из однозначных ветвей следующих многозначных функций.

8.12. $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$, относительно точки $z = 1$.

8.13. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$, относительно точки $z = \infty$.

8.14. $\mathrm{L}n\,\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$, относительно точки $z = \infty$.

8.15. $\mathrm{L}n\,\sin\dfrac{1}{z-1}$, относительно точки $z = 1$.

8.16. $\mathrm{L}n\,\cos\dfrac{1}{z-1}$, относительно точки $z = 1$.

Ответы

8.4 *Указание.* Воспользоваться результатом предыдущей задачи, положив $z_n' = n\pi,\ z_n'' = (2n + \frac{1}{2})\pi,\ \ n = 1, 2, ...$

8.6 1) $z = 0$ — устранимая особая точка; $z = \pm\pi, \pm 2\pi, ...$ — полюсы.

2) $z = 0$ — устранимая особая точка; $z = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, ...$ — полюсы.

3) $z = \infty$ — полюс; $z = -1$ — существенно особая точка.

4) $z = \infty$ и $z = 1$ — устранимые особые точки; $z = -1$ — существенно особая точка.

5) $z = 0$ — устранимая особая точка; $z = \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, ...$ — полюсы.

6) $z = \infty$ — устранимая особая точка; $z = 0$ — существенно особая точка.

7) $z = \pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3}, ...$ — существенно особые точки.

8) $z = 0$ — существенно особая точка.

8.7 В первом случае a является либо существенно особой точкой, либо неизолированной особой точкой (предельной для полюсов).

Во втором случае a является существенно особой точкой.

8.9 *Решение.* По теореме Пикара 8.7 для любого числа A, кроме, возможно, одного, найдется последовательность $z_n \to a$ такая, что $f(z_n) = A$. По крайней мере одно из чисел 0 и 1 не является таким исключительным значением. Следовательно, существует последовательность $z_n \to a$, для которой $f(z_n)[f(z_n) - 1] = 0$. Эти точки z_n — полюсы функции $\dfrac{1}{f(z_n)[f(z_n) - 1]}$. Следовательно, a — неизолированная особая точка (именно, предельная для полюсов).

8.10 1) $z = \pm\ i$ — нули второго порядка; $z = \pm\ 1$ — полюсы первого порядка; $z = \infty$ — полюс второго порядка.

2) $z = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, ...$ — полюсы первого порядка; $z =$

$\pm\dfrac{\pi}{2},\ \pm\dfrac{3\pi}{2},\ \pm\dfrac{5\pi}{2},...$ — нули первого порядка; $z = \infty$ — предельная точка для полюсов.

3) $z = 0$ — нуль третьего порядка; $z = \pm\,\pi,\ \pm\,2\pi,\ \pm\,3\pi,...$ — нули второго порядка; $z = \pm\dfrac{\pi}{2},\ \pm\dfrac{3\pi}{2},\ \pm\dfrac{5\pi}{2},...$ — полюсы второго порядка.

4) $z = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,...$ — нули третьего порядка.

5) $z = \infty$ — нуль второго порядка; $z = 0$ — полюс второго порядка.

6) $z = \dfrac{1}{4},\ \dfrac{9}{4},\ \dfrac{25}{4},\ \dfrac{47}{4},...$ — нули первого порядка; $z = 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,...$ — полюсы первого порядка.

7) $z = -\pi^2,\ -4\pi^2,\ -9\pi^2,...$ — полюсы первого порядка.

8) $z = \pm\dfrac{\pi}{2},\ \pm\dfrac{\pi i}{2},\ \pm\dfrac{3\pi}{2},\ \pm\dfrac{3\pi i}{2},\ \pm\dfrac{5\pi}{2},\ \pm\dfrac{5\pi i}{2},...$ — нули первого порядка.

8.11 1) $\operatorname{res}\,[\,f(z);\ \pm 1\,] = -\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{res}\,[\,f(z);\ 0\,] = 1$, $\operatorname{res}\,[\,f(z);\ \infty\,] = 0$.

2) $\operatorname{res}\,[\,f(z);\ -1\,] = -\operatorname{res}\,[\,f(z);\ \infty\,] = \dfrac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$.

3) $\operatorname{res}\,[\,f(z);\ 2\,] = -\operatorname{res}\,[\,f(z);\ \infty\,] = -\dfrac{143}{24}$.

4) $\operatorname{res}\,[\,f(z);\ 0\,] = -\operatorname{res}\,[\,f(z);\ \infty\,] = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+1)!}$.

5) $\operatorname{res}\,[\,f(z);\ m\pi\,] = -1, \quad (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, ...)$

6) $\operatorname{res}\,[\,f(z);\ 0\,] = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{res}\,[\,f(z);\ \dfrac{2m\pi i}{h}\,] = \dfrac{1}{2m\pi i}$, $(m = 0, \pm 1, ...)$.

7) $\operatorname{res}\,[\,f(z);\ m^2\pi^2\,] = (-1)^m\, 2\, m^2\, \pi^2, \quad m = 1, 2, ...$

8) $\operatorname{res}\,[\,f(z);\ 0\,] = 0$, если $n < 0$, а так же если $n > 0$ – нечетное;

$\operatorname{res}\,[\,f(z);\ 0\,] = (-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{(n+1)!}$, если $n = 0$, или $n > 0$ – четное;

$\operatorname{res}\,[\,f(z);\ 0\,] = -\operatorname{res}\,[\,f(z);\ \infty\,]$.

9) $\operatorname{res}\,[\,f(z);\ m\pi\,] = (-1)^m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

8.12 *Решение.* Функция допускает выделение регулярных ветвей на комплексной плоскости с вырезанной отрицательной полуосью:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{|z|e^{i\frac{\arg z}{2}}}}{1 - |z|\,e^{i\arg z}} = +\frac{\sqrt{z}}{1-z}; \qquad \omega_2 = \frac{\sqrt{|z|e^{i\frac{\arg z}{2} + i\pi}}}{1 - |z|\,e^{i\arg z}} = -\frac{\sqrt{z}}{1-z}.$$

Поэтому $\operatorname{res}[\,\omega_1,\ 1\,] = -1, \quad \operatorname{res}[\,\omega_2\,, 1\,] = 1.$

8.13 *Решение.* Функция допускает выделение регулярных ветвей на комплексной плоскости во внешности отрезка $[\,a\ b\,]$: одна из ветвей $\omega_1 = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ — принимает положительные значения при положительных z, тогда как другая ветвь $\omega_2 = -\sqrt{(z-a)(z-b)}$ принимает при этих z отрицательные значения. Разложение функции в ряд Лорана с нужной нам точностью имеет вид $\sqrt{(z-a)(z-b)} = z\sqrt{(1-\dfrac{a}{z})(1-\dfrac{b}{z})} \approx z(1-\dfrac{a}{2z}-\dfrac{a^2}{8z^2}+...)(1-\dfrac{b}{2z}-\dfrac{b^2}{8z^2}+...) \approx z-\dfrac{(a+b)}{2}-\dfrac{(a-b)^2}{8z}+...$ Поскольку $\operatorname{res}[\ \omega_k,\ \infty\ ] = -C_{-1}, \quad k = 1,2,$ то $\operatorname{res}[\ \omega_1,\ \infty\ ] = \dfrac{(a-b)^2}{8}, \quad \operatorname{res}[\,\omega_2,\ \infty\,] = -\dfrac{(a-b)^2}{8}.$

8.14 *Решение.* Функция допускает выделение регулярных ветвей на комплексной плоскости во внешности отрезка $[\ \alpha,\ \beta\ ]$: $\omega_m = \ln\left|\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}\right| + {}$ $+\, i\ \arg\left(\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}\right) + i\,2\pi m.$ Вычет в точке $z=\infty$ есть коэффициент C_{-1} при $\dfrac{1}{z}$ в разложении функции в ряд Лорана, взятый с обратным знаком. Таким образом, $\operatorname{res}[\,\omega_m,\ \infty\,] = \alpha-\beta$ для всех ветвей.

8.15 $2m\pi i + \dfrac{1}{2\cdot 3!} - \dfrac{1}{4\cdot 5!} + ...,$ если $\mathrm{L}n\,1 = 2m\pi\ i.$

8.16 $-\dfrac{1}{1\cdot 2!} + \dfrac{1}{3\cdot 4!} - \dfrac{1}{5\cdot 6!} + ...$ — для всех ветвей.

9 Применение теории вычетов

9.1 Вычисление интегралов по замкнутому контуру

Интегралы по замкнутому контуру вычисляются с использованием теоремы о вычетах. Рассмотрим несколько примеров, во всех примерах обход контура совершается в положительном направлении.

Пример 9.1. Если $f(z) = (2z-1)\cos\dfrac{z}{z-1}$, то $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} f(z)\,dz = I = 2\pi i \operatorname*{res}_1 f(z)$, так как функция аналитична в круге $\{|z|<2\}$, кроме точки $z=1$, которая является существенно особой. Используя пример 7.9, запишем

$$\cos\frac{z}{z-1} = \cos 1\Big(1-\frac{1}{2(z-1)^2}+\cdots\Big)-\sin 1\Big(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots\Big),$$

$$2z-1 = 2(z-1)+1,$$

откуда находим коэффициент при $(z-1)^{-1}$ ряда Лорана для функции $F(z)$: $c_{-1} = -(\cos 1 + \sin 1)$. Следовательно,

$$I = 2\pi i\, c_{-1} = -2\pi i\,(\cos 1 + \sin 1).$$

Пример 9.2. Вычислим интеграл $I = \displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{1/(z-1)}}{z-2}\,dz.$

Этот интеграл можно вычислить двумя способами. Подынтегральная функция имеет в круге $\{|z| < 4\}$ две особые точки: $z = 1$ и $z = 2$. Следовательно, $I = 2\pi i\,(\operatorname*{res}_1 f(z) + \operatorname*{res}_2 f(z))$. Так как

$$e^{1/(z-1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n}, \quad \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n,$$

то $\operatorname*{res}_1 f(z) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = -(e-1) = 1 - e$. Далее, $\operatorname*{res}_2 f(z) = (e^{1/(z-1)})_{z=2} = e$. Таким образом, $I = 2\pi i$.

Можно вычислить I, используя теорему 8.10. Тогда $I = -2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z)$. Точка $z = \infty$ является для $f(z)$ нулем первого порядка:

$$\frac{1}{z-2} \sim \frac{1}{z}, \quad e^{1/(z-1)} \sim 1, \quad , f(z) \sim \frac{1}{z} \ \ (z \to \infty).$$

Тогда (см. задача 8.8) $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -1$ и, следовательно, $I = 2\pi i$.

Пример 9.3. Вычислим интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1/2} \frac{\sqrt{z}}{z-1}\,dz$.

Функция $\sqrt{z}$ распадается в круге $K = \{|z-1| < 1/2\}$ на две регулярные ветви (см. задачу 8.12) $f_1(z) = g_1(z)/(z-1)$ и $f_2(z) = g_2(z)/(z-1)$. Пусть $g_1(z)$ — та ветвь корня, для которой $g_1(1) = 1$; тогда $g_2(1) = -1$. Каждая из функций регулярна в круге K, кроме точки $z = 1$, которая является их простым полюсом. По теореме о вычетах

$$\int\limits_{|z-1|=1/2} f_1(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_1 f_1(z) = 2\pi i\, g_1(z) = 2\pi i.$$

Аналогично, $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1/2} f_2(z)\,dz = -2\pi i.$

Пример 9.4. Вычислим интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1/2} \frac{z^2+1}{\ln\, z - \pi i}\,dz.$

Функция $\ln\, z$ распадается в круге $K = \{|z+1| < 1/2\}$ на бесконечное число регулярных ветвей $g_k(z)$, определяемых условием $g_k(-1) = (2k+1)\pi i$. Обозначим $f_k(z) = \frac{z^2+1}{g_k(z)-\pi i}$. Так как в круге K $g_k(z) \neq \pi i$ при $k \neq 0$, то каждая из функций $f_k(z)$ ($k \neq 0$) аналитична и, следовательно, $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1/2} f_k(z)\,dz = 0$. Для ветви $f_0(z)$ точка $z = -1$ является полюсом первого порядка. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{-1} f_0(z) = \Big[\frac{z^2+1}{(\ln\, z - \pi i)'}\Big] = \frac{2}{(1/z)_{z=-1}} = -2$$

и $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1/2} f_0(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{-1} f_0(z) = -4\pi i.$

9.2 Вычисление определенных интегралов

С помощью теоремы о вычетах могут вычислены многие определенные интегралы.

Интегралы вида $I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$.

Интегралы вида

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx, \tag{9.1}$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция от u, v, сводятся к интегралам по замкнутому контуру от функций комплексного переменного. Пусть $z = e^{ix}$. Тогда

$$\sin x = \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big), \quad \cos x = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \quad dx = -i\frac{dz}{z}. \tag{9.2}$$

При изменении x от 0 до 2π переменная z пробегает окружность $|z| = 1$ в положительном направлении. Интеграл (9.1) сводится к интегралу по замкнутому контуру

$$I = \int\limits_{|z|=1} R_1(z)\, dz, \tag{9.3}$$

где $R_1(z) = -\frac{I}{z} R\Big[\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big]$ — рациональная функция от z. По теореме о вычетах

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} R_1(z),$$

где z_1, $z_2, \ldots$, z_n — все полюсы рациональной функции $R_1(z)$, лежащие в круге $|z| < 1$.

Интегралы от рациональных функций.

Рассмотрим интеграл вида $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$, где $R(x)$ — рациональная функция. Предполагается, что интеграл сходится. К интегралам такого вида нельзя непосредственно применить теорему о вычетах, так как контур интегрирования — бесконечная незамкнутая прямая. Введем вспомогательный контур Γ_R, состоящий из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности $C_R = \{|z| = R,\, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ и рассмотрим интеграл $\int\limits_{\Gamma_R} R(z)\,dz$.

Теорема 9.1. *Пусть функция* $f(z)$ *аналитична в области* $\operatorname{Im} z > 0$, *за исключением конечного числа особых точек, и непрерывна вплоть до границы этой области. Если* $f(z)$ *обладает в* $z = \infty$ *нулем, по крайней мере, второго порядка, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

В формуле (9.4) вычеты берутся по всем особым точкам функции $f(z)$, лежащим в верхней полуплоскости. Из сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$ следует, что $R(z)$ удовлетворяет условиям теоремы. Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z). \qquad (9.4)$$

Вспомогательный контур можно расположить и в нижней полуплоскости, тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k<0} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z).$$

Пример 9.5. Вычислим интеграл $I = \int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{1+x^{2n}}$,
где $n \geq 1$ — натуральное число. Уравнение $z^{2n}+1$ имеет следующие корни: $z_k = e^{i(2k+1)\pi/2n}$, $k = 0, 1 \ldots, 2n-1$. Воспользуемся тем, что $f(e^{i\pi n}z) \equiv f(z)$. В качестве контура возьмем кривую Γ_R, состоящую из отрезка $[0, R]$, дуги окружности $C_R = \{z = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi/n\}$ и отрезка $l = \{z = re^{i\pi/n}, 0 \leq r \leq R\}$. По теореме о вычетах,

$$\int\limits_{\Gamma_R} R(z)\,dz = \int\limits_0^R R(x)\,dx + \int\limits_{C_R} R(z)\,dz + \int\limits_l R(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_0} R(z), \tag{9.5}$$

так как внутри контура Γ_R функция $R(z)$ имеет только один полюс $z_0 = e^{i\pi/(2n)}$. Вычет в точке z_0 равен

$$\operatorname*{res}_{z_0} R(z) = \frac{1}{2nz_0^{2n-1}} = -\frac{z_0}{2n}.$$

Далее, интеграл по отрезку l сводится к интегралу по отрезку $[0, R]$:

$$\int\limits_l R(z)\,dz = -\int\limits_0^R R\,(re^{i\pi/n})e^{i\pi/n}\,dr = -e^{i\pi/n}\int\limits_0^R \frac{dr}{1+r^{2n}}.$$

Осталось оценить интеграл по C_R. Так как $|R(z)| \sim 1/|z|^{2n}$ $(z \to \infty)$, то $\int\limits_{C_R} R(z)\,dz \to 0 \ \ (R \to \infty)$. Переходя в равенстве (9.5) к пределу и учитывая полученные выражения, получаем

$$(1 - e^{i\pi/n})\,I = -\frac{\pi i}{n} e^{i\pi/(2n)}, \quad \text{откуда} \quad I = \frac{\pi}{2\pi\, sin\,\frac{\pi}{2n}}.$$

Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\, R(x)\, dx$.

Здесь $R(x)$ — рациональная функция. Интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\, R(x)\, dx$ есть преобразование Фурье функции $R(x)$. При вычислении таких интегралов используется лемма Жордана.

Лемма 9.2 (Жордан)**.** Пусть функция $f(z)$ аналитична в $\operatorname{Im} z \geq 0$ всюду, за исключением изолированного множества особых точек, и $M(R) = \max|f(z)|$ на полуокружности $C_R = \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ стремится к нулю при $R \to \infty$. Тогда для любого $\lambda > 0$

$$\int\limits_{C_R} f(z)\, e^{i\lambda z}\, dz \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Смысл леммы состоит в том, что $M(R))$ может стремиться к нулю сколь угодно медленно, так что интеграл от $f(z)$ по полуокружности не обязан стремиться к нулю, умножение на экспоненту убыстряет стремление к нулю. Поэтому, если в I функция $R(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и функция $R(z)$ не имеет полюсов на действительной оси, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\, R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{i\alpha z} R(z)\right). \tag{9.6}$$

Как и раньше, суммирование ведется по всем особым точкам функции $e^{i\alpha z}R(z)$ в верхней полуплоскости.

Если функция $R(x)$ является действительной при действительных x и $\alpha > 0$, то отделяя в (9.6) действительную и мнимую части, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, \cos\, \alpha x\, dx = -2\pi \operatorname{Im} \Big[\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{i\alpha z} R(z)\right) \Big],$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, \sin\, \alpha x\, dx = 2\pi \operatorname{Re} \Big[\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{i\alpha z} R(z)\right) \Big],$$

Пример 9.6. Вычислим интегралы Френеля

$$I_1 = \int\limits_0^{\infty} \cos\, x^2\, dx, \quad I_2 = \int\limits_0^{\infty} \sin\, x^2\, dx.$$

Рассмотрим контур Γ_R из примера 9.5 при $n = 4$. Так как e^{iz^2} аналитична внутри Γ_R, то

$$\int\limits_{\Gamma_R} e^{iz^2}\, dz = \int\limits_0^R e^{ix^2}\, dx + \int\limits_{C_R} e^{iz^2}\, dz + \int\limits_l e^{iz^2}\, dz = 0. \tag{9.7}$$

Оценим интеграл $\int\limits_{C_R} e^{iz^2}\,dz$. При $z \in C_R$ имеем $z = Re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi/4$, так что

$$|e^{iz^2}| = e^{-R^2 \sin 2\varphi} \le e^{-(4R^2/\pi)\varphi},$$

поскольку $\sin 2\varphi \ge 4\varphi/\pi$ $(0 \le \varphi \le \pi/4)$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{C_R} e^{iz^2}\,dz\right| \le R \int\limits_0^{\pi/4} e^{-(4R^2/\pi)\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2}) \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Далее, если $z \in l$, то $z = re^{i\pi/4}$, так что $e^{iz^2} = e^{-r^2}$. Поэтому

$$\int\limits_l e^{iz^2}\,dz = -e^{i\pi/4} \int\limits_0^R e^{-r^2}\,dr.$$

Учитывая полученные равенства, а так же факт, что $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, переходя в (9.7) к пределу, получаем

$$\int\limits_0^\infty e^{ix^2}\,dx = e^{i\pi/4}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Выделяя действительные и мнимые части, находим искомые интегралы:

$$\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx = \int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Задачи

Используя теоремы о вычетах, вычислить интегралы:

9.1. $\displaystyle\int\limits_l \frac{zdz}{(z-a)(z-b)(z-c)}.$

Рассмотреть случаи, когда внутри контура находятся одна, две и три особые точки подынтегральной функции.

9.2. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+4}dz.$

9.3. $\displaystyle\int\limits_{|z=2|} \frac{dz}{z^{10}+1}.$

9.4. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1}.$

9.5. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=2} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)}.$

9.6. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)}.$

9.7. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2(z^2+9)}.$

9.8. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{\sin z}{z^2+9}dz.$

9.9. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}, \quad n\in\mathbb{N}, \quad 0\le|a|<1<|b|.$

9.10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}, \quad n\in\mathbb{N}, \quad 0\le|a|<|b|<1.$

9.11. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \sin^n 1/z \, dz.$ **9.12.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{e^z+1} \, dz.$

9.13. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{z+1}{e^z+1} \, dz.$ **9.14.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^n \, e^{m/z} \, dz.$

Применяя теорию вычетов, вычислить следующие определенные интегралы.

9.15. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi + a}, \quad a > 1.$ **9.16.** $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + \sin\varphi}.$

9.17. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b\cos\varphi)^2}, \quad a > b > 0.$ **9.18.** $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3 + \cos^2\varphi)^2}.$

9.19. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a^2 + \sin^2\varphi}, \quad a > 0.$ **9.20.** $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi}{a + b\cos\varphi} \, d\varphi \quad a > b > 0.$

9.21. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}, \quad |a| \neq 1.$

9.22. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2} \, d\varphi, \quad |a| < 1.$

9.23. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,d\varphi, \qquad |a|<1.$

9.24. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \operatorname{ctg}(x-a)\,dx, \qquad \operatorname{Im} a \neq 0.$

Вычислить интегралы по бесконечному промежутку.

9.25. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$

9.26. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$

9.27. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx.$

9.28. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$

9.29. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+1)}.$

9.30. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+4)(x^2+1)}.$

9.31. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}.$

9.32. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+b^2}dx.$

9.33. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}dx.$

9.34. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)^3}dx.$

9.35. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+2px+q}dx.$

9.36. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+2px+q}dx.$

9.37. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}dx.$

9.38. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx.$

9.39. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+x+1}dx.$

9.40. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\sin x}{x^3(x^2+a^2)}dx.$

9.41. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2(x^2+b^2)}dx.$

9.42. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\cos 3x}{(x^2+1)^2}\ dx.$

Ответы

9.1 $\dfrac{2\pi ai}{(a-b)(a-c)}, \quad -\dfrac{2\pi ci}{(c-a)(c-b)}, \quad 0.$

9.2 *Решение.* Поскольку внутри контура находятся две особые точки подынтегральной функции — полюсы первого порядка $z_{1,2} = \pm 2i$, то, применяя первую теорему о вычетах, можем записать

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2+4};\ 2i\right] + \operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2+4};\ -2i\right]\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^z}{2z}\Big|_{z=2i} + \frac{e^z}{2z}\Big|_{z=-2i}\right) = 2\pi i\left(\tfrac{e^{2i}}{4i} - \tfrac{e^{-2i}}{4i}\right) = \tfrac{\pi}{2}(e^{2i} - e^{-2i}) = \pi i \sin 2 =$$

$= \pi sh 2i.$

9.3 *Решение.* Подынтегральная функция $f(z) = \dfrac{1}{z^{10}+1}$ имеет десять особых точек $z_k = \exp\left(\dfrac{(2k+1)\pi i}{10}\right)$, $k = 0, 1, ..., 9$, являющихся простыми полюсами, лежащими на единичной окружности. Так как разложение функции в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\frac{1}{z^{10}+1} = \frac{1}{z^{10}(1+\frac{1}{z^{10}})} = \frac{1}{z^{10}}\left(1 - \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^{20}} - ...\right) = \frac{1}{z^{10}} - \frac{1}{z^{20}} + \frac{1}{z^{30}} -$$

$..., 1 < |z| < \infty$, то $-c_{-1} = res\left[\dfrac{1}{z^{10}+1};\infty\right] = 0.$ Поэтому, применяя вторую теорему о вычетах, можем записать, что

$$\sum_{k=0}^{9} res\left[\frac{1}{z^{10}+1}; e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}\right] = -res\left[\frac{1}{z^{10}+1};\infty\right] = 0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^{10}+1}dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{9} res\left[\frac{1}{z^{10}+1}; e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}\right] = 0.$$

9.4 $-\dfrac{\pi i\sqrt{2}}{2}$. **9.5** $2\pi i$. **9.6** $4\pi i$. **9.7** $\dfrac{2\pi i}{9}$. **9.8** $\dfrac{2\pi i}{3}\operatorname{sh} 3$.

9.9 $(-1)^n \cdot \dfrac{n(n+1)...(2n-2)}{(n-1)!} \cdot \dfrac{2\pi i}{(a-b)^{2n-1}}$. **9.10** 0.

9.11 $2\pi i$ при $n=1$; 0 при $n>1$. **9.12** 0. **9.13** $-4\pi i$.

9.14 $\dfrac{\pi}{2}$. **9.15** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. **9.16** $\dfrac{\pi}{2}$. **9.17** $\dfrac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$.

9.18 $\dfrac{7\pi\sqrt{3}}{72}$. **9.19** $\dfrac{2\pi}{a\sqrt{a^2+1}}$. **9.20** $\dfrac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$.

9.21 *Решение.* Обозначим исходный интеграл $I(a)$. Производя в нем замену $z=e^{i\varphi}$, $dz=ie^{i\varphi}$, $d\varphi=iz\,d\varphi$, $\cos\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}=\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}=$ $=\dfrac{z^2+1}{2z}$, получаем $I(a)=\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\dfrac{dz}{iz\left(1-a\frac{z^2+1}{z}+a^2\right)}=$ $=-i\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\dfrac{dz}{-az^2+a^2z+z-a}=i\int\limits_{|z|=1}\dfrac{dz}{a(z-a)(z-\frac{1}{a})}$. Так как при любом a, $|a|\neq 1$, внутри круга $|z|<1$ находится только один корень знаменателя подынтегральной функции, то при $|a|<1$ имеем

$I(a)=\dfrac{2\pi i^2}{a}\,res\left[\dfrac{1}{(z-a)(z-\frac{1}{a})};\ a\right]=\dfrac{2\pi}{1-a^2}$, а если $|a|>1$, то

$I(a)=\dfrac{2\pi i^2}{a}\,res\left[\dfrac{1}{(z-a)(z-\frac{1}{a})};\ \dfrac{1}{a}\right]=\dfrac{2\pi}{a^2-1}$. Таким образом,

$$I(a)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{1-a^2}, & \text{если } \ |a|<1\\[2mm] \dfrac{2\pi}{a^2-1}, & \text{если } \ |a|>1\end{cases}.$$

9.22 $\pi\,\dfrac{(1+a^4)}{1-a^2}$. **9.23** $\pi\,\dfrac{(1+a^6)}{1-a^2}$. **9.24** $\pi i\cdot sign\,\mathrm{Im}\,a$.

9.25 $\pi\sqrt{2}$. **9.26** $\dfrac{4}{3}\,\pi$. **9.27** $\dfrac{\pi}{2\,a}$. **9.28** $\dfrac{\pi\,(2a+b)}{2\,a^3\,(a+b)^2\,b}$.

9.29 $\dfrac{\pi}{4}$. **9.30** $\dfrac{\pi}{12}$. **9.31** $\dfrac{5\pi}{32}$. **9.32** $\dfrac{\pi}{2}e^{-ab}$.

9.33 $\dfrac{\pi}{4}\dfrac{(1+ab)}{b^3}e^{-ab}$. **9.34** $\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{7}{4e}\right)$.

9.35 $\dfrac{\pi}{\sqrt{q-p^2}}e^{-a\sqrt{q-p^2}}\cos ap$, $p^2<q$.

9.36 $\dfrac{\pi}{\sqrt{q-p^2}}e^{-a\sqrt{q-p^2}}\sin ap$, $p^2<q$. **9.37** $\dfrac{\pi}{6}e^{-3}$.

9.38 $\dfrac{\pi}{2}e^{-4}(\sin 2 + 2\cos 2)$. **9.39** $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}\sin\dfrac{1}{2} - \cos\dfrac{1}{2})$.

9.40 $\dfrac{\pi}{a^4}\left(\dfrac{a^2}{2} - a + 1 - e^{-a}\right)$. **9.41** $\dfrac{\pi}{2b^3}\left(2ab - 1 + e^{-2ab}\right)$.

9.42 $-\pi/\, e^3$.

При составлении сборника были использованы книги:

1. Л.А. Аксентьев. Сборник задач по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению, Казань, 2005г.
2. А.В. Ефимов и др., Сборник задач по математике для ВТУЗов, т 3. Москва, «Физматлит», 2007г.
3. М.А. Евграфов и др., Сборник задач по теории аналитических функций, Москва, «Наука», 1969г.
4. Н.М. Гюнтер и Р.О. Кузьмин, Сборник задач по высшей математике, т. III, Москва, «ГИТТЛ», 1951 г.
5. М.А.Лаврентьев, Б.В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Москва, «Наука», 1987 г.
6. Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ , часть I, Москва, «Наука», 1976 г.
7. Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин, Лекции по теории функций комплексного переменного, Москва, «Наука», 1976 г.
8. А.В. Бицадзе, Основы теории аналитических функций комплексного переменного, Москва, «Наука», 1984 г.
9. А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич, Введение в теорию аналитических функций, Москва, «Просвещение», 1977 г.
10. А.В. Аминова, В.А. Сочнева, Методы математической физики, часть I, «Изд. КГУ», 1978 г.